BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

AAN9444
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B51492
035/2: : |a (CaOTULAS)160099812
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Mueller, Felix, |d 1843-
245:00: |a Historisch-etymologische studien über mathematische terminologie ...
260: : |a Berlin, |c 1887.
300/1: : |a 32 p. |c 25 x 20 cm.
500/1: : |a Separate, from Programm no. 64-Königliche Luisen-Gymnasium, Berlin.
650/1: 0: |a Mathematics |x Terminology
650/2: 0: |a Mathematics |x History.
998: : |c KLB |s 9124

Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums. Ostern 1887.

Historisch-etymologische Studien

über

mathematische Terminologie.

Von

Dr. Felix Müller,
Oberlehrer am Königl. Luisen-Gymnasium.

BERLIN 1887.
Druck von W. Pormetter.

1887. Programm No. 64.

Nicht ein positiv gegebenes Material, sondern die unendliche Mannigfaltigkeit der Formen des Anschaulichen und Abstrakten ist Gegenstand der mathematischen Wissenschaften. Nicht ein bestimmt begrenztes Ziel, wie es den meisten andern Wissenschaften durch die Natur ihres Gegenstandes gesteckt ist, erstrebt die Mathematik; sie wächst frei, aber dem Gesetze der Stetigkeit gehorchend, nach allen Richtungen ins Unendliche. Man hat die mathematische Wissenschaft wiederholt und mit Recht verglichen mit einem mächtigen stolzen Bauwerk, an welchem niemals etwas niedergerissen wird, sondern das fortwährend nach allen Dimensionen sich vergröfsert. Wer flüchtigen Blickes dieses unermefsliche Gebäude mit seinen in den verschiedensten Stilarten glänzenden Teilen überschaut, der erkennt in ihm schwerlich ein wohl gegliedertes organisches Ganze; nur an der Hand der Geschichte gelingt es, sich in diesem Labyrinthe zurecht zu finden. Ein Einzelner vermag es nicht mehr, in alle Teile dieses Baues tiefer einzudringen; die meisten müssen sich damit begnügen, nach Aneignung der notwendigsten Fundamente hinaufzusteigen und auf der Höhe diese oder jene vereinzelte Disciplin gründlicher kennen zu lernen. Mühsam ist der Weg hinauf, obschon treffliche Meister den Jünger von Stufe zu Stufe geleiten. Schwer ist es, allen diesen Meistern, denen wir uns auf unsrem Wege anvertrauen müssen, zu folgen; denn ein jeder hat seine eigene Methode, ein jeder hat sein eigenes Idiom, ein jeder seine eigenen geheimnisvollen Zeichen. In den verschiedensten Zungen reden jene Tausende von Arbeitern, die an dem grofsen Werke fleifsig zimmern, — und nicht unberechtigt scheint die Befürchtung, die einmal ein geistvoller, der Wissenschaft leider zu früh entrissener Mathematiker äufserte, es könnte die Mathematik das Geschick des Turmes zu Babel erfahren [1]). Dafs unsre Wissenschaft vor dem Einsturze bewahrt bleibt, das verdanken wir, nicht zum geringsten, den Vorzügen der mathematischen Sprache.

Als eine wesentliche, charakteristische Eigenschaft der mathematischen Sprache mufs neben anderen Kennzeichen, wie Kürze und Bündigkeit des Ausdrucks, hauptsächlich gefordert werden: möglichste Sparsamkeit in Kunstausdrücken, geschickte Bildung und richtige Anwendung derselben. In erster Linie trachte man darnach, mit möglichst wenigen Kunstwörtern auszukommen. Durch das Bestreben, Ausnahmen zu beseitigen und verschiedene Sätze unter einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird der Mathematiker häufig genötigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe einzuführen. Führt die Untersuchung auf Begriffe, welche bisher nirgend sich finden, so benenne man sie nicht eher, als bis man sie hinlänglich untersucht und bestimmt hat. Nicht jedem zusammengesetzten

---

[1]) Man vergleiche den Aufsatz von Kästner: Über Kunstwörter, besonders in der Mathematik; Eberhard's Phil. Mag. IV, 270, und den geistvollen Vortrag von H. Hankel: Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten; Tübingen 1869.

Begriffe gebe man einen besonderen Namen, sondern nur denen, die oft gebraucht werden, und bei denen es nicht möglich ist, ohne viele Worte ihre Merkmale anzudeuten. Die Kunstausdrücke müssen so gebildet werden, dafs schon aus ihrem Wortlaut ihr Begriff einigermafsen verständlich ist. In dieser Hinsicht können uns die Griechen als Muster gelten. Sie gingen von Anschauungen aus, um Begriffe für den Verstand zu erhalten, und ihre Kunstausdrücke entlehnten sie der Sprache des gemeinen Volkes. „Der griechische Geometer", sagt Kästner, „unterschied sich von seinem ungeometrischen Landsmanne nicht durch Wörter, sondern durch Begriffe und Schlüsse, ganz anders, als seit ihm viele Gelehrte gethan haben, deren Geheimnisse nicht in Sachen, sondern in Wörtern bestehen."

Das Studium der mathematischen Terminologie liefert uns zahlreiche Beispiele, welche diesen Ausspruch bewahrheiten; doch liegt es nicht in unsrer Absicht, eine Kritik an den einzelnen mathematischen Kunstausdrücken zu üben oder zu zeigen, inwieweit die mathematische Sprache der verschiedenen Nationen und der verschiedenen Zeiten von dem durch die griechischen Geometer gegebenen Muster abwich. Es war uns bei unsren Studien insbesondere um die historische Verfolgung der mathematischen Kunstausdrücke bis zu ihrer Quelle zu thun. Eine solche Aufgabe ist in mehrfacher Hinsicht interessant. Die Lexikographie erfährt dadurch eine mannigfache Ergänzung, eine Erweiterung und Klärung der Begriffe. Für diejenigen, welche die Philosophen aus ihren Quellen kennen lernen und deren Spekulationen über Zahlen- und Raumgröfsen verstehen wollen, ist eine eingehende Kenntnis der Terminologie geradezu unentbehrlich. Es ergeben sich ferner bei dieser Forschung merkwürdige Beziehungen zwischen der Geschichte der Mathematik und der Sprachengeschichte. Die Wahl vieler Kunstwörter erscheint uns oft erst dann berechtigt, wenn wir ihre historische Entstehung betrachten; und umgekehrt lassen sich aus der Wahl der Kunstausdrücke mehrfach Rückschlüsse machen auf die von den Mathematikern befolgten Methoden. Die benutzten Worte setzen die für die Denkungsart ganzer Nationen und einzelner Forscher charakteristischen Gegensätze in helleres Licht. Ferner giebt uns das Studium der Kunstausdrücke oftmals Aufschlufs über den wissenschaftlichen Verkehr der Nationen und über den gegenseitigen wissenschaftlichen Einflufs derselben. Hier ist oft allein die Quelle zu suchen, aus denen Nationen und einzelne Forscher ihr Wissen geschöpft haben.

Die mathematisch-historische Forschung, welche in den letzten Jahrzehnten einen grofsartigen Aufschwung gewonnen hat, giebt uns auch über die Entstehung der mathematischen Kunstausdrücke mannigfache Aufschlüsse. Die bekannten mathematischen Wörterbücher genügen in dieser Hinsicht den heutigen Ansprüchen der Wissenschaft nicht mehr. In der Überzeugung, dafs eine Zusammenstellung der durch die neuesten historischen Forschungen gewonnenen Resultate nicht überflüssig sein dürfte, hat der Verfasser in einem gröfseren Werke, das er später zu veröffentlichen gedenkt, eine systematisch geordnete Übersicht über die bekanntesten älteren und neueren mathematischen Kunstausdrücke zu geben versucht, unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entstehung, ihrer Etymologie und ihrer Bedeutung. Das Studium der Terminologie der alten Mathematiker ist durch die neueren vortrefflichen Ausgaben der Werke eines Euklid, Archimedes, Theon, Nikomachus, Apollonius, Pappus, Proclus, Boethius u. a. sehr erleichtert worden. Für die in den letzten 5 bis 6 Decennien eingeführten mathematischen Kunstausdrücke,

deren Zahl besonders in der modernen Algebra, in der projektivischen Geometrie und in der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen sehr grofs ist, fehlt es bis jetzt an einer genügenden Zusammenstellung; man ist hier auf die einzelnen Originalarbeiten, in denen sie vorkommen, angewiesen[1]).

Was die früheren Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Terminologie anbetrifft, so soll der verstorbene Oberschulrat J. H. T. Müller die Kunstausdrücke aus den bedeutenderen geometrischen Werken der griechischen Mathematiker gesammelt haben[2]); veröffentlicht ist von demselben in einem Gymnasialprogramm[3]) die Terminologie, soweit sie die Theorie der Sphäroide betrifft. Später hat Herr K. G. Hunger „die arithmetische Terminologie der Griechen, als Kriterium für das System der griechischen Arithmetik"[4]) behandelt.

Das Folgende enthält, da der uns zugewiesene Raum ein beschränkter ist, auszugsweise einige Kapitel aus der mathematischen Terminologie, die vielleicht auch für den Nichtmathematiker von Interesse sein werden.

Die Mathematik und ihre Disciplinen.

Der Name unsrer Wissenschaft „Mathematik" ist griechischen Ursprungs; bei den Griechen heifst sie *ἡ μαθηματική*, sc. *τέχνη*. Der Stamm *μαθ-*, welcher in den Wörtern *ἔμαθον* lernte, *μανθάνω* lerne, *μάθημα* das Gelernte, die Wissenschaft, liegt, deutet auf ein „strebendes Denken, Trachten"[5]). Noch zu Plato's Zeiten verstand man unter *μαθήματα* Lerngegenstände oder Lehrgegenstände, sciences, — alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Unterrichtes war. Erst bei den Peripatetikern bekam das allgemeine Wort *μαθήματα* die besondere Bedeutung der mathematischen Wissenschaften, und diese waren damals die Rechenkunst (*ἡ λογιστική*) und die Arithmetik (*ἡ ἀριθμητική*), die Geometrie der Ebene (*ἡ γεωμετρία*) und Stereometrie, die Astronomie und Musik (*κανονική*). Fast zu gleicher Zeit wurde der Name Philosophie (*φιλοσοφία*), der früher die wörtliche Bedeutung der Liebe zu den Wissenschaften, der Wissens- oder Forschbegierde hatte, einer besonderen Wissenschaft, der Wissenschaft vom Wissen, zuerteilt. Plato erhob die Mathematik durch das Wort: „Die Wissenschaft ist nicht des praktischen Nutzens wegen (*πράξεως ἕνεκα*), sondern nur der Erkenntnis wegen (*γνώσεως ἕνεκα*) zu betreiben"[6]), das er den Mathematikern der damaligen Zeit zurief, zu einer wahren Wissenschaft. An einer Stelle seiner Politeia[7])

---

1) Dies hat den Verfasser veranlafst, auf der letzten Naturforscher-Versammlung, in einer Sitzung der mathematisch-astronomischen Sektion, die Herstellung eines neuen mathematischen Wörterbuches anzuregen.

2) K. G. Hunger, Die arithmetische Terminologie der Griechen, Pr. Hildburghausen 1874, S. 4. Dafs, wie Herr Hunger sagt, J. H. T. Müller jene Sammlung bei der Abfassung des geometrischen Teiles seines Lehrbuches der Mathematik verwertet habe, beruht wohl auf einem Irrtum.

3) J. H. T. Müller, Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker. Pr. Wiesbaden und Leipzig, Teubner 1860. 4) Siehe Anmerkung 2).

5) G. Curtius, Grundzüge der griechischen Etymologie, 3. Aufl., Leipzig, Teubner 1869, S. 291 ff.: Der Stamm *μαθ* entspringt der weit verzweigten Wurzel *μεν* oder *μαν*, die unter andern in den Worten *μένω*, maneo, bleibe, *μέμονα* trachte, *μένος*, mens Mut, Sinn zu suchen ist und in erster Linie ein strebendes Denken, Trachten bedeutet. 6) Staat, Buch VII, 527 B. 7) Seite 510; vgl. S. B. Rothlauf, Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr. Diss. Jena 1878, S. 4.

giebt er den Unterschied zwischen Philosophie und Mathematik, indem er sagt, die Philosophie schreite, von einer Hypothese ausgehend, zu einem Urprincipe zurück, das nicht mehr auf einer Hypothese beruhe, und bewerkstellige den Weg ihrer Forschung nur mit reinen Begriffen, ohne Hilfe von Bildern, wie sie die Mathematik benutze.

Bei Hero von Alexandrien (um 100 v. Chr.) finden wir folgende Definition der Mathematik: *Μαθηματική ἐστιν ἐπιστήμη θεωρητικὴ τοῦ νοήσει τε καὶ αἰσθήσει καταλαμβανομένου πρὸς τὴν τῶν ὑποπιπτόντων δόσιν*[1]. Schon die pythagoräische Mathematik hatte ihre Systematik. Vier mathematische Disciplinen beantworteten nämlich die von den Pythagoräern gestellten Fragen: „Wie viel?“ *πόσος*, und „Wie grofs?“ *πηλίκος*. Die Arithmetik behandelte die Vielheit an sich, *τὸ ποσὸν καθ' ἑαυτοῦ*, die Musik die Vielheit bezogen auf anderes, *τὸ ποσὸν πρὸς ἄλλο*, die Geometrie behandelte die ruhende Gröfse, *τὸ πηλίκον ἐν μονῇ καὶ στάσει*, und die Sphärik die bewegliche Gröfse, *τὸ πηλίκον ἐν κινήσει καὶ περιφορᾷ*[2]. Plato[3] unterscheidet 5 mathematische Disciplinen, deren Studium er als Vorschule zur Vernunfterkenntnis fordert: 1) die Arithmetik, „die aber nicht für den gemeinen Hausgebrauch betrieben werden soll, sondern eine begriffliche Anschauung vom Wesen der Zahlen bezweckt“, 2) die Geometrie, d. h. nur die der Ebene, 3) die Stereometrie, die „Wissenschaft von der Ausdehnung der Würfel und von dem überhaupt, was Tiefe hat“, 4) die Astronomie, die „das Körperliche in seiner Bewegung“ behandelt, und 5) die Harmonik, welche „die in harmonischen Tönen sich offenbarende Bewegung“ erforscht. Bei späteren Mathematikern findet sich die der pythagoräischen Schule entlehnte Trennung der Stereometrie von der Geometrie nicht mehr. Zur Zeit des Aristoteles (384—322) traten die Untersuchungen über das Sehen und über die Ausbreitung des Lichtes hinzu und es wurden die Gesetze des Gleichgewichtes studiert, und das System der Mathematik setzte sich nun aus folgenden 6 Disciplinen zusammen: Arithmetik und Geometrie, Musik und Astronomie, Optik und Mechanik. Hero von Alexandrien knüpft an die oben angeführte Definition der Mathematik folgende Aufzählung ihrer Teile[4]: *Τῆς μὲν τιμιωτέρας καὶ πρώτης ὁλοσχερέστερα μέρη δύο, ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία· τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ ἀσχολουμένης ἕξ· ἡ λογιστική, γεωδαισία, ὀπτική, κανονική, μηχανική, ἀστρονομική.* Im wesentlichen bestand der Unterschied zwischen der Arithmetik und der Logistik darin, dafs erstere die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen an und für sich, also Zahlentheorie im heutigen Sinne war, während die Logistik die Gestaltungen der Zahl mit Bezug auf sinnliche Gegenstände behandelte, d. h. die praktische Rechenkunst war[5]. Die *κανονική*, die Musik, die Lehre von der Harmonie im weitesten Sinne des Wortes, trug ihren Namen von dem *κανών*, der Skala des Monochords, dessen sich Pythagoras u. a. bedienten, um die Gesetze der Töne zu ermitteln[6]. Geminus, der wahrscheinlich etwas später als Hero

[1]) Hultsch, Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Berolini 1864, p. 278, § 81.

[2]) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, ed. Friedlein, Leipzig 1873, p. 35—36; M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Bd. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig, Teubner 1880, S. 133. Vgl. auch Nikomachus, Introductio arithmetica. I, 3, p. 5.

[3]) Plato, Politeia. VII, 8—12.

[4]) Hultsch, Heronis Alexandrini reliquiae, p. 278, § 82.

[5]) Näheres über diesen Gegensatz siehe bei Hunger, l. c. p. 8—13.

[6]) Hinsichtlich der Terminologie der Musik verweisen wir auf den interessanten Aufsatz von Th. H. Martin, Boncompagni Bullettino V, 99.

lebte[1]), teilt die ganze Mathematik in 2 Hauptteile. Der eine, welcher sich mit dem Intelligiblen, dem geistig Wahrnehmbaren, τὰ νοητά, beschäftigt, enthält die Arithmetik und die Geometrie; der zweite, der an dem Sensiblen, dem sinnlich Wahrnehmbaren, τὰ αἰσθητά, seine Thätigkeit entwickelt, die Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie, Musik und Logistik. Über diese Einteilung sind die Alten nicht hinausgekommen.

Mehrere der genannten mathematischen Disciplinen gehörten zu den „freien Künsten", τέχναι, artes liberales, deren Begriff sich bei den Griechen entwickelte und sich bis in das Mittelalter hinein erstreckte. Marcus Terentius Varro (wahrscheinlich 116—27 v. Chr.), der gelehrteste Mann seiner Zeit, schrieb eine Encyklopädie in neun Büchern: „De disciplinis", welche späteren Encyklopädisten, wie Martianus Capella, Cassiodorus, Isidorus Hispalensis u. a. zum Muster diente. Die Reihenfolge der in diesem leider verloren gegangenen Werke behandelten neun Wissenschaften war folgende: Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Geometrie, Arithmetik, Astrologie, Musik, Medicin, Architektur. Später, gegen Ende des fünften Jahrhunderts, kannte die lateinische Welt sieben freie Künste, das Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik, und das Quadruvium: Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie. Die ersteren geben den dreifachen Weg (triplex via) an, der zur eloquentia führte. Das für die 4 mathematischen Disciplinen gebräuchliche Wort quadruvium (wörtlich ein Kreuzweg, in welchen 4 Strafsen münden) findet sich zuerst bei Boethius, der um das Jahr 500 lebte. Er sagt in der Einleitung zur institutio arithmetica[2]): 'Inter omnes priscae auctoritatis viros, qui Pythagora duce puriore mentis ratione viguerunt, constare manifestum est, haud quemquam in philosophiae disciplinis ad cumulum perfectionis evadere, nisi cui talis prudentiae nobilitas quodam quasi quadruvio vestigatur, quod recte intuentis sollertiam non latebit.' Unter Anwendung eines ähnlichen Bildes spricht Cassiodorus von den genannten mathematischen Disciplinen als von den 4 Pforten der Mathesis (quadrifariae mathesis januae)[3]).

Die Araber fügten zu dem von den Griechen und den Indern Gelernten die gemeine Rechenkunst, die niedere Algebra und die Trigonometrie hinzu. Ihre Gelehrsamkeit wurde zu Anfang des 13. Jahrhunderts nach Europa verpflanzt, und bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts der Wissenschaft der europäischen Kulturvölker der Charakter der indisch-arabischen aufgeprägt. Das erste Gebiet, auf dem sie eine eigene Thätigkeit entwickelten, war die Algebra. Hier finden wir zuerst die den modernen Kulturvölkern eigene analytische Richtung, das Besondere unter einem allgemeinen Gesichtspunkte zusammenzufassen. Ihre analytische Methode erschliefst das Specielle aus dem Allgemeinen, im Gegensatze zu der synthetisch, d. h. vom Besonderen zum Allgemeinen fortschreitenden Geometrie der Alten. Descartes machte diese Richtung auf die Algebra auch für die Geometrie nutzbar, er schuf die analytische Geometrie und wurde dadurch der Begründer der neueren Mathematik. Sollte so der Begriff der geometrischen Gröfse mit dem der diskreten Zahl verschmolzen werden, so mufste der Widerspruch in der Vergleichung der stetigen Gröfse mit der Zahl aufgehoben werden, und dies geschah durch die Idee des Unendlichkleinen. Leibnitz und Newton werden stets vereint genannt werden

[1]) Nesselmann, Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Erster (einziger) Teil: Die Algebra der Griechen. Berlin, G. Reimer, 1842, S. 40. [2]) Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque. Ed. Friedlein, Lipsiae 1867, p. 7. [3]) Cantor, l. c. p. 490; Cassiodorus Variarum (epistolarum) liber I, 45.

als die Schöpfer der Infinitesimalrechnung. Auf diese Weise entstand die Wissenschaft der Analysis, welche auf dem Begriffe der Funktion die Lehre von den Verhältnissen stetig sich verändernder Gröfsen aufbauen sollte. Endlich trat bei Beginn dieses Jahrhunderts an die Seite der analytischen Geometrie die synthetische oder projektivische Geometrie, eine Schöpfung Poncelets.

Es würde uns hier zu weit führen, wollten wir alle diejenigen Zweige, in welche sich bis heut die soeben angeführten mathematischen Disciplinen geteilt haben, auch nur flüchtig dem Inhalt nach skizzieren. Wir wollen nur noch einiges die Systematik Betreffende anführen. Man trennt die reine Mathematik von der angewandten und kann den Unterschied etwa so formulieren. Die reine Mathematik untersucht die Zahleneinheiten und Gröfseneinheiten an und für sich, die angewandte Mathematik betrachtet dieselben zu dem Zwecke, Beziehungen zwischen Objekten der Wirklichkeit zu entdecken, die man sich unter dem Bilde der Zahl und der Gröfse vorstellt. Die notwendigen Beziehungen, welche aus der Natur der Zahlen fliefsen, sind Gegenstand der Arithmetik im weiteren Sinne; diejenigen, welche aus der Natur des Raumes sich ergeben, bilden den Gegenstand der Geometrie. Die Arithmetik im engern Sinne hat es mit der Entwickelung des Zahlbegriffes zu thun. Aufgabe der Algebra ist es, Eigenschaften unbekannter Zahlen zu ermitteln, welche aus Beziehungen derselben zu bekannten Zahlen sich ergeben. Die Analysis endlich beschäftigt sich mit den veränderlichen Gröfsen. In die angewandte Mathematik gehören Mechanik, mathematische Physik und Astronomie; ihr Objekt ist die Welt der sinnlichen Wahrnehmung, ihr Inhalt die Lehre von der Bewegung.

Was die Namen unsrer Disciplinen anbetrifft, so haben wir schon oben den Unterschied zwischen Arithmetik, ἀριθμητική scil. τέχνη (von ἀριθμός, Zahl) und Logistik, λογιστική (von λόγος)[1]) angegeben. Im Mittelalter verlor das Wort Logistik seine ursprüngliche Bedeutung; einige verstanden unter Logistica die Lehre von den elementaren algebraischen Operationen, andere sogar die Algebra, die Auflösung der Gleichungen. Vieta schuf für die Buchstabenrechnung den Namen logistices speciosa in seiner Isagoge in artem analyticam 1591. Der Zusatz speciosa war dadurch berechtigt, dafs die Zahlen durch species, Formen, Bilder, Figuren dargestellt wurden. Die italienischen Mathematiker des Mittelalters unterschieden die logistica numerosa, das Rechnen mit Zahlen, von der logistica (oder arithmetica) speciosa, der Buchstabenrechnung. Der Name arithmetica universalis wurde von Newton eingeführt, und zwar für die Algebra, die Lehre von den Gleichungen. Er nennt sie universalis vermutlich deswegen, weil sie vielfach auch zur Auflösung geometrischer Aufgaben angewendet werden kann. Wesentlich verschieden von der Arithmetik der Alten ist diejenige Wissenschaft der Zahlen, welche Gaufs[2]) arithmetica sublimior, höhere Arithmetik, Legendre[3]) théorie des nombres, Zahlentheorie nannte, und die sich in ihren Elementen mit dem beschäftigt, was man mit Kummer[4]) Chemie der Zahlen nennen könnte.

---

[1]) Von der Wurzel λεγ-, die ursprünglich die Bedeutung des Auslesens, Zusammenlesens hat. Curtius, Griech. Etym. S. 339. Das praktische Rechnen ist ein „Zusammenlesen", man vergleiche die Ausdrücke πεμπάζειν, ψηφίζειν, calculare, auf die wir an anderer Stelle zurückkommen.

[2]) Gaufs, Disquisitiones arithmeticae, praefatio. Werke I, 5. [3]) Legendre, Essai d'une théorie des nombres. Paris a. VI. [4]) Crelle J. XXXV, 360 und in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie.

Nach dem, was wir oben als die Aufgabe der Geometrie bezeichnet haben, entspricht ihr Name *γεωμετρία* von *γῆ*, Erde, und *μετρεῖν*, messen, sehr wenig dem Begriffe dieser Wissenschaft, selbst wenn man statt der Erde, des uns zunächst zugänglichen Teiles des Raumes, den Raum überhaupt setzen wollte. Schon Plato nannte im Epinomides *γεωμετρία* ein *ὄνομα γελοῖον*, eine lächerliche Benennung. Der Name deutet auf die Fabel des Herodot (lib. II, 109) von der Entstehung der Geometrie bei den Ägyptern, welche jedoch über die roheste Empirie nicht hinausgekommen sind. *Ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ*[1]), sagt Plato, und „die Geometrie ist etwas ganz Anderes, als die Ausdrücke lauten, welche die Professionisten derselben im Munde führen“[2]). Zwischen der Geometrie und der Geodäsie, *γεωδαισία* (von *γῆ*, Erde, und *δαίομαι*, teile) bestand ein ähnlicher Unterschied, wenigstens zur Zeit des Aristoteles (384—322), wie zwischen Arithmetik und Logistik[3]). Doch waren die Definitionen der Geodäsie sehr schwankend[4]). In der neueren Zeit, seit ungefähr zwei Jahrhunderten, sieht man als Hauptaufgabe der Geodäsie bekanntlich die Ermittelung der wahren Gestalt der Erde an.

Einen eigentümlichen Ursprung hat der Name Algebra. Auf Veranlassung des Khalifen Al Mamûm schrieb um das Jahr 820 Muhammed ben Mûsâ al Hovarezmi ein Werk unter dem Titel Al gebr (sprich Aldschebr) w al mukâbala, das zu seiner Zeit hochgeschätzt wurde und auf die Entwickelung der abendländischen Mathematik einen grofsen Einflufs ausübte[5]). Die beiden im Titel vorkommenden Ausdrücke bezeichnen die beiden einfachsten Operationen, die mit einer Gleichung, oder richtiger im Sinne der Araber und der alten Italiener, denen die seit Harriot[6]) gebräuchliche Form einer auf Null gebrachten Gleichung ein Unding war, mit einer Gleichheit zweier absolut positiver Gröfsen vorzunehmen sind. Al gebr von jábara, restituit, bedeutet nämlich das Herstellen, Einrichten, d. h. das Fortschaffen eines Gliedes auf die andere Seite, um auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur positive Glieder zu erhalten; al mukâbala (von kábala, opposuit, comparavit) aber die Vergleichung, Gegenüberstellung, d. h. die Vereinigung gleichartiger Glieder beider Seiten, um sie soweit wie möglich gegeneinander aufzuheben. In der „Quintessenz der Rechenkunst“ des persischen Mathematikers Beha Eddin (1547—1622) heifst es: „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt und etwas dieser Gleiches auf der anderen Seite addiert: das ist al djebr. Die homogenen und gleichen Glieder werden ausgeworfen, und das ist almokabalâ[7])“. Nach diesen beiden, am häufigsten vorkommenden Operationen benannte Muhammed ben Mûsâ seine Wissenschaft. Beide Namen wurden anfangs, d. h. seit dem XII. S., von den lateinischen Übersetzern beibehalten. Später, und zwar vereinzelt im XIV. S. und allgemein seit 1600 ungefähr, blieb nur der erste Name, al gebra, übrig. Die lateinische Übersetzung, welche den Worten algebra und almukabala bisweilen hinzugefügt wurde, war restauratio et oppositio, z. B. bei Leonardo Bonacci in seinem Liber Abaci 1202, und bei Lucas de Burgo in seiner Summa de arithmetica etc. 1494. Unbekannt mit dem Ursprunge des Wortes Algebra glaubten mehrere, wie der Florentiner Rafael Canacci,

---

[1]) Plutarch, Sympos. VIII, pr. 2. [2]) Plato, Polit. VII, 9, p. 527. [3]) Cantor, l. c. S. 218 und Aristoteles Metaphys. II, 2, s. auch Heronis reliquiae, ed. Hultsch § 11 u. 12. [4]) Vgl., aufser den eben citierten, Galenus, ed. Friedlein, Ansbach 1866. [5]) Moh. ben Musa Alchowaresmi Algebra ou almokabala, publ. by Rosen, London 1831. [6]) Harriot, Artis analyticae praxis, 1631. [7]) L. Matthiefsen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878, p. 267 Anm.

ferner Michael Stifel, Jacob Peletarius, Adam Riese, das Wort hänge mit dem Namen des arabischen Astronomen Geber oder Dschâbir ibn Aflah aus Sevilla zusammen. Selbst Mädler[1]) bemerkt irrtümlich, der Name des Astronomen Geber, der übrigens wenigstens 200 Jahre nach Muhammed ben Mûsâ lebte, sei in dem Worte Algebra, für deren ersten Erfinder er irriger Weise angesehen werde, enthalten.

Bei den Indern heifst die Algebra vîja-ganita oder vîja-kriyâ, eigentlich „Ursprungsrechnung oder Ursprungsoperation, Kausalrechnung“, insofern als die algebraische Operation, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Zahlenrechnung, zugleich die Gründe des Verfahrens hervortreten läfst. Auch kommt das Wort vîja (sprich vîdscha) allein in derselben Bedeutung wie das zusammengesetzte Wort vor. Eine andere Benennung unsrer Wissenschaft war avyakta-ganita oder avyakta-kriyâ, Rechnung oder Operation mit der Unbekannten (avyakta). Im Gegensatze dazu heifst die gemeine Arithmetik bisweilen vyakta-ganita, d. h. Rechnung mit bekannten Gröfsen. Es liegt in diesen Namen, wie in den meisten Kunstausdrücken der Inder, zugleich die Definition des Begriffes[2]).

Kehren wir am Schlusse dieses Kapitels noch einmal zum Beginn desselben, zu dem Namen unsrer Wissenschaft, der Mathematik, zurück. Der der Mathematik Kundige, der Mathematiker, hiefs bei den Griechen *γεωμέτρης*, Geometer, und der der Mathematik (Geometrie) Unkundige *ἀγεωμέτρητος*, geometricorum imperitus (Pappus lib. III, S. 112, 25). Bei Plato[3]) wird das Wort *ὁ μαθηματικός* in der Bedeutung der Lernbegierige, disciplinarum studiosus, gebraucht; aber bei Aristoteles[4]) ist *ὁ μαθηματικός* der der Mathematik Kundige. Archimedes umschreibt durch *οἰκεῖος τῶν μαθημάτων* oder *περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφόμενος*. Im Pappus kommt das Wort *μαθηματικός*, mathematicus, als Substantivum nur an einer einzigen Stelle vor[5]). Desgleichen gebraucht Boethius das Wort mathematicus als Substantivum nur ein einziges Mal[6]). Die Franzosen nennen auch heut noch einen Mathematiker géomètre, selbst wenn er in anderen als geometrischen Disciplinen sich den Namen Mathematiker erworben. Im Mittelalter bedeutete mathematicus so viel wie Astrologe, weshalb wir in lateinischen und italienischen Wörterbüchern zugleich die Übersetzung „Wahrsager“ finden. War doch einst der Name der Mathematik, durch die Verbindung derselben mit Astrologie und Zeichendeuterei, so sehr in Mifskredit geraten, dafs ein Gesetz des Justinianischen Codex den respektwidrigen Titel führte: ‘De maleficis et mathematicis et ceteris similibus’ und wörtlich gebot: ‘ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino’[7]). — Als im VI. S. in Italien die schriftstellerische Thätigkeit auf weltlichem Gebiete ganz erlosch und selbst berühmte Gelehrte von der Mathematik wenig mehr als einige Wort- und Sacherklärungen wufsten, da verstand man unter mathesis nichts als Astrologie. Erst mit dem Wiedererwachen der Wissenschaften in Europa, nachdem die mathematischen Kenntnisse durch die Araber nach dem Occident verpflanzt und die Schätze des Altertums nach und nach erschlossen waren, und dann die eigene freie Arbeit auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften begann, kam auch der Name unsrer Wissenschaft wieder zu Ehren. Durch die

---

[1]) Mädler, Geschichte der Himmelskunde, Braunschweig 1873, p. 96. [2]) Nesselmann l. c. S. 40. [3]) Plato, Timaeus 88 B: *τὸν … μαθηματικὸν ἤ τινα ἄλλην σφόδρα μελέτην διανοίᾳ κατεργαζόμενον*. [4]) Aristoteles, Ethic. 6, 8 u. flg. [5]) Pappus Lib. VI, p. 556. [6]) Boethius, De Instutitione musica, p. 179, 14. [7]) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, Teubner 1874, p. 301.

grofsartigen Entdeckungen eines Descartes, Newton und Leibnitz wurde das Ziel der Mathematik so weit hinausgerückt, dafs sie sich die Erforschung der Gesetze, welche die allgemeinsten Beziehungen und Abhängigkeits-Verhältnisse zwischen Gröfsen enthalten, zur Aufgabe stellte und sich so die gesamte Forschung in der Natur unterwarf. Freilich vermag der Laie den Umfang dieser grofsen Aufgabe nicht zu fassen; daher es uns nicht wunderbar erscheinen darf, wenn er sich unter einem Mathematiker oft nur einen Rechenkünstler oder einen Feldmesser vorstellt. Christian Wolff giebt seiner Klage über den Mifsbrauch des Namens Mathematiker seitens Unverständiger durch folgende Worte Ausdruck: „Daher kommt es, dafs man denen Mathematicis öfters beileget, was man gewissen Handwerkern beimessen sollte, folglich nicht solche Hochachtung vor sie hat, wie Gassendus, der ihnen unter denen Gelehrten den Rang giebet, welchen die Propheten unter denen Gottesgelehrten haben.“[1])

Arithmetik.

Der Ursprung der Zahlwörter gehört sicherlich der ältesten Zeit menschlicher Sprachbildung an; fast allein aus der grofsen Übereinstimmung der Zahlwörter können Beweise alter Stammverwandtschaft der Völker gewonnen werden. Über den ursprünglichen Sinn der Zahlwörter sind die Fachmänner nicht einig. Viele haben vergeblich sich bemüht, in den Zahlwörtern Verbalstämme zu entdecken. In den Zahlwörtern einiger uncivilisierter Völker finden sich Bezeichnungen konkreter Mengen von Dingen; im allgemeinen aber zeigt sich in den Zahlen ein rein abstrakter Charakter. Nur für wenige Zahlen bedurfte man eines besonderen Namens, da man schon früh die Entstehungsweise einer Zahl aus anderen erkannte. Das persische Wort pendj = 5 ist abzuleiten vom persischen pentscha, die Faust. Derselben Wurzel entspringen das Sanskritwort pantscha, 5, das griechische *πέντε*, das lat. quinque, das gotische fimf. Mit dem Fortschreiten vom blofsen Zählen zum Verknüpfen von Zahlen, zum Rechnen, entstanden die Zahlensysteme. Diese sind bei allen Völkern, welche überhaupt im Besitze eines solchen Zahlensystemes sind, nach demselben Princip gebildet. Das dekadische Zahlensystem, nach welchem alle Kulturvölker zählen, hat sich wahrscheinlich nach der Zahl der Finger gebildet. Es hat besondere einfache Wörter für die neun Einer und für die ersten Potenzen der Grundzahl 10. Die grammatische Verbindung der beiden Zahlwörter, der Einer und der betreffenden Stufenzahl, ist eine sehr verschiedene, wie folgendes von Hankel[2]) angeführte Beispiel zeigt:

18 heifst lateinisch decem et octo (10 + 8), oder duo de viginti (20 — 2),
griechisch *ὀκτὼ-καὶ-δέκα* (8 + 10),
französisch dix-huit (10, 8),
deutsch achtzehn (8, 10),
bas-breton tri-omc'h (3 · 6),
welsch deu-naw (2 · 9),
aztekisch caxtulli-om-ey (15 + 3).

Für die höhere Stufenzahl sind oft Wörter gebraucht, welche eine unbestimmte Vielheit ausdrücken, z. B. das griechische *μύριοι*, eigentlich unzählige, für 10000. Im 2. Buche des Pappus, worin die Multiplikationsmethode des Apollonius dargestellt wird,

---

1) Mathematisches Lexikon, Leipzig 1734, p. 815. 2) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik etc. p. 22.

werden die Zahlen unter 10000 *μονάδες*, Einheiten, genannt, die 5—8stelligen *μυριάδες ἁπλαῖ*, einfache Myriaden, die 9—12stelligen *μυριάδες διπλαῖ*, doppelte Myriaden, die 13—16stelligen *μυριάδες τριπλαῖ*, und so fort, nach Potenzen von 10000 geordnet bis zu den *μυριάδες τρισκαιδεκαπλαῖ*, 10000^{13}. Archimedes gruppierte in seiner Sandrechnung, *ψαμμίτης*, lateinisch arenarius (so genannt nach der darin behandelten Aufgabe, die Zahl der Sandkörner, *τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου*, zu ermitteln, die eine Kugel faſst, deren Radius von der Erde bis an die Fixsterne reicht), eine Gruppierung sehr groſser Zahlen nach Oktaden, $1-10^8$, 10^9-10^{16} etc. Am reichsten an Zahlwörtern für höhere Stufenzahlen sind die zum Phantastischen geneigten Inder. Das Wort Million, welches im Italienischen ursprünglich ein konkretes Maſs, nämlich 10 Tonnen Goldes, bezeichnet zu haben scheint [1]), kommt wohl zuerst als abstraktes Zahlwort in Pacioli's Summa de Arithmetica, 1494, vor [2]). Die Worte für die Potenzen von 1000000, nämlich billion, trillion, quadrillion, quillion, sixlion, septilion, octilion, nonillion, finden sich in dem 1484 handschriftlich vollendeten Traktat des Nicolas Chuquet aus Lyon „Le Triparty en la Science des nombres", und in der, mit Benutzung dieser Handschrift 1520 zu Lyon erschienenen Larismetique de maistre Etienne de la Roche [3]), sind also älteren Ursprungs, als Hankel vermutete [4]); sie wurden allerdings erst im vorigen Jahrhunderte häufiger gebraucht. In der Arithmétique von Jacques Pelletier du Mans, départie en quatre liures, a Theodore Debesze, reueüe et corrigee, Poitiers 1552, wird das Wort „Milliart" (Plur. milliars) erklärt als „Million de Millions", während in der bald darauf erschienenen L'Arithmétique de Jan Trenchant, Lyon 1566, tausend Millionen mit „miliars" bezeichnet werden [5]), also das Wort Milliarde in demselben Sinne genommen wird, wie es in diesem Jahrhundert in Frankreich und in Deutschland Gebrauch geworden ist. Der Ausdruck 'cumulo', den Francesco del Sole in seiner Arithmetik „Libretti nuovi con le regole" 1546 für 1000000^2, also für Billion, Milliard, gebraucht [6]), erinnert wegen seiner abstrakten Bedeutung an das griechische *μύριοι*.

Die Griechen wählten in den ältesten Zeiten (c. 600—300 v. Chr. und später) zur Bezeichnung der Zahlen die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter; diese Zeichen sind nach dem byzantinischen Grammatiker Herodianus (c. 200 n. Chr.), der sie schilderte, herodianische genannt. Später (kurz nach 500) bildeten sich zwei andere Methoden der Zahlenbezeichnung aus; die eine stellt die Zahlen 1 bis 24 durch die 24 Buchstaben des ionischen Alphabets dar, während die andere den einzelnen Buchstaben nicht aufeinanderfolgende Zahlenwerte beilegte. Ob die Griechen das älteste Volk sind, bei dem Zahlenbezeichnungen vorkommen, oder die Hebräer, ist bis jetzt nicht zu entscheiden. Von einem Zeichen für die Null ist bei den Griechen keine Spur; die Null war ihnen keine Zahl.

Das Rechnen mit Ziffern ist indischen Ursprungs. Die Inder haben zuerst nur für die neun Einheiten, 1 bis 9, Ziffern benutzt; erst später kam das Zeichen für die Null hinzu. Im VIII. S. wurden die Araber des Ostens mit den inzwischen wesentlich veränderten Ziffern bekannt [7]). Durch die Vermittelung der Araber kamen diese indischen Ziffern am Ende des 10. und zu Anfang des 11. S. nach Europa. Die Namen für

---

[1]) Baltzer, Leipz. Ber. 1865, p. 2. [2]) Hankel, l. c. p. 14. — Chr. Clavius, Epitome Arithmeticae Practicae, Romae 1583, C. 1: Si more Italorum millena millia appellare velimus milliones, paucioribus verbis et fortasse significantius numerum quemcunque propositum exprimemus. (Kästner Gsch. d. Math. I, 145.) [3]) Boncompagni Bull. XIII, 555 sq. und I, 149 Anm. [4]) Hankel, l. c. p. 14. [5]) Boncompagni Bull. I, 150, Anm. [6]) ibid. X, 428 sq. [7]) Cantor, l. c. p. 610.

diese Ziffern, nämlich 1 igin, 2 andras, 3 ormis, 4 arbas, 5 quinas, 6 calctis (caltis, caletis), 7 zenis, 8 temenias (zemenias), 9 celentis, in denen man vergeblich griechische Wörter gesucht hat, sind nichts als durch mündliche Überlieferung verstümmelte arabische Wörter. Diese fremdländischen Namen erhielten sich nur kurze Zeit. Das indische Verfahren mit den Gobarziffern wurde im XII. S. in Europa bekannt; die Namen kamen dabei nicht mehr in Betracht[1]). Mit den Ziffern ging von den Arabern zu den Lateinern auch deren Bezeichnung der Null mit ṣifr in die Sprache des Occidents über. Aṣ-ṣifr heifst das Leere und ist eine Übersetzung des indischen sunya. Leonardo Pisano[2]) lehrte in seinem „Liber abbaci" das Anschreiben mit den „novem figurae indorum" und dem „signum, quod arabice zephirum appellatur". Nach Wöpcke's Ansicht ging dieses arabische Wort zephirum allmählig in zefiro und zero über, wie in den italienischen Mss. des XIV. und XV. S. zu finden ist[3]). Wie Fürst Boncompagni (Giornale degli Eruditi e Curiosi di Padova, t. II, fasc. 36, 1883) nachgewiesen hat, findet sich das Wort zero schon in 3 italienischen Lehrbüchern der Arithmetik aus den Jahren 1307, 1346 und 1370. In Deutschland blieb die lateinische Form cifra die herrschende. Man bezeichnete anfänglich die 10 Zahlzeichen durch „cifrae et figurae", hernach begnügte man sich einfach mit dem Worte „cifrae", woraus das deutsche Wort „Ziffer" und das französische „chiffre" entstanden ist. Wolff sagt: „Cyfra oder Cyphra, nicht zu verwechseln mit Ziffer, heifst diejenige Nota oder der Charakter, welcher von sich selbst keine eigene Bedeutung, als wie die andern 9 Ziffern hat, sondern er wird gebraucht, die leeren Stellen damit auszufüllen, wo keine Zahl stehet. Ihr Zeichen, ein Circul, heifset Null oder Zero." Doch liegt es auf der Hand, dafs die alte Bedeutung des Wortes cifra in die heutige von Ziffer übergegangen ist.

Bei den ältesten Völkern finden wir sowohl das Fingerrechnen als das Rechnen auf einem Rechenbrette. Für das erstere hat man das Fremdwort Dactylonomia (von δάκτυλος, digitus, Finger)[4]) oder Chironomia (von χεῖρ, Hand) gewählt. Die Finger dienten wohl ursprünglich, wie noch jetzt den Kindern, als Merkmal zur Veranschaulichung der Zahlen. Daher heifst zählen bei Homer πεμπάζειν, auch ἀναπεμπάζειν (vom äol. πέμπε, 5), wörtlich „abfünfen". Dafs die Ägypter, ebenso wie die Griechen, auf einem Rechenbrette rechneten, erzählt Herodot[5]). Das Rechenbrett hiefs ἄβαξ, auch ἀβάκιον; auf demselben waren (wahrscheinlich durch wagerechte Linien)[6]) Abteilungen oder Kolumnen gezogen, welche den zum Rechnen dienenden Marken oder Steinchen einen verschiedenen Stellenwert verliehen. Diese Steinchen hiefsen ψῆφοι; daher das Rechnen ψηφίζειν, mit Steinchen hantieren, genannt wurde. Über die Bedeutung des Namens ἄβαξ für das Rechenbrett hat man sich vielfach gestritten; ja dieser Streit wird heute noch fortgeführt. Die einen[7]) vergleichen das Wort mit dem semitischen אבק, abak, Staub, und übersetzen daher „Staubbrett". Auch Jamblichus[8]) erzählt, der Abax der

[1]) Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869, p. 68. [2]) Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo-terzo, pubbl. da B. Boncompagni. Roma 1857. Vol. I, p 2. [3]) Friedlein, l. c. p. 69. [4]) siehe S. 15 digiti. δάκτυλος weist als Deminutivform auf ein verlorenes δακτος wie digitus auf decetus und ist mit der W. δεκ zusammenzustellen und mit δέκα, decem, zehn, der Summe der Finger, verwandt (Curtius, Griech. Etym. S. 112 u. 129). [5]) Herodot, II, 36. [6]) Friedlein, l. c. p. 5. [7]) Nesselmann, l. c. p. 107 und Vincent, Liouville J. IV, 275. [8]) Jamblichus: De vita Pythagorica cap. V, p. 22, und Exhortatio ad philosophiam Symbol. XXIV.

Pythagoräer sei ein mit Staub bedecktes Brett gewesen. Dagegen sind Th. H. Martin[1]) und andere der Ansicht, der Stamm βακ sei mit dem α privativum zu einem Worte vereinigt, und ἄβαξ bedeute daher ein Brettchen, das ohne Fufs, ohne Untergestell ist. Diese Erklärung stützt sich darauf, dafs das Wort ἄβαξ und ähnlich klingende Wörter sehr häufig in Bedeutungen gebraucht werden, die an Staub in keiner Weise erinnern. Auch die Römer hatten ihren Abacus. Von diesem Recheninstrument sind zwei Arten bekannt. Die erste war mit senkrecht gegen den Rechner stehenden Einschnitten (alveoli) versehen, in denen Knöpfchen (claviculi) hin und her geschoben wurden; die zweite Art hatte wahrscheinlich wagerechte Linien, auf welche Rechensteinchen (calculi) gelegt wurden. Da calculus das Demin. von calx, der Stein, ist, so könnte calculare die Übersetzung von ψηφίζειν sein, das wir oben (S. 13) hatten. Das Wort calculare für rechnen hatten die alten Römer noch nicht; sie sagten calculos subducere[2]). Das Wort calculare findet sich erst im IV. S. n. Chr. bei einem christlichen Dichter Aurelius Prudentius Clemens aus Spanien, in dessen Peristephanon[3]). Boethius[4]) erzählt, die Pythagoräer hätten sich, um Irrtümer bei der Multiplikation, der Division und bei Flächenberechnungen (in podismis) zu vermeiden, eine Tafel (formulam) konstruiert, die sie dem Meister zu Ehren mensa Pythagorea nannten, und die von den Späteren „abacus“ genannt worden sei. Diese Tabelle war wohl nichts anderes als das Einmaleins für die Zahlen 1 bis 9. Ein solches Täfelchen, das in 9 Horizontal- und 9 Vertikalreihen die Resultate der Multiplikation der Zahlen 1 bis 9 untereinander enthält, nennt noch Wolff Pythagorische Tabelle, abacus pythagoricus. Es ist auffallend, dafs der römische Abacus, der zuletzt hauptsächlich bei Berechnungen aus dem Gebiete der Feldmefskunst gedient hatte, Jahrhunderte hindurch fast gänzlich vergessen worden war. Erst im X. S. wurde er wieder zu Ehren gebracht. Gerbert und seine Schüler Bernelinus, Hermannus Contractus und andere lehrten die Kunst des Kolumnenrechnens auf dem Abacus. Dieser Abacus war eine in Kolumnen abgeteilte Tafel, die, um geometrische Figuren darauf zeichnen zu können, mit blauem Sande bestreut wurde. Diese sich des Abacus bedienenden Rechenmeister nannte man Abacisten. Leonardo Pisano schrieb ein Buch über die Rechnung mit dekadischen Zahlen und nannte es liber abaci. Ein geschickter Rechner des XIV. S., Paulus, erhielt den Beinamen Abaco. Die Sexagesimalrechnung wurde auch abacus logisticus genannt; eine Tafel der Primzahlen hiefs später abacus numerorum primorum; Lambert nennt sogar eine Tafel der Vielfachen des Sinus abacus sinuum[5]). Im XVI. Jahrhundert rechnete man in Deutschland auf hölzernen Rechentafeln mit Rechenpfennigen oder anderen Marken. Diese Tafeln hatten horizontale Linien, welche den darauf befindlichen Rechenpfennigen ihren Wert als Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. verliehen. Wurde eine Zahl zwischen zwei Linien gesetzt, so galt sie halb so viel wie auf der darüber stehenden Linie. Solches Rechnen hiefs das Rechnen auf den Linien, algorithmus linealis[6]). Über den Ursprung dieses Algorithmus ist man zur Zeit noch nicht einig. Einige behaupten, dafs das dazu benutzte Rechenbrett der Abacus der Alten oder doch im wesent-

---

[1]) Th. H. Martin, Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge. Rome 1864. [2]) Cicero: calculum abducere, zusammenrechnen. [3]) Terquem, Bull. d. math. IV, 33. [4]) Boethius, Ars geom., ed. Friedlein, p. 396. [5]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, mit Fortsetzungen und Supplementen von Mollweide und Grunert, Leipzig 1803—1836, I, 2. [6]) Rechnung auff der Linihen und Federn durch Adam Rysen, 1529.

lichen mit ihm übereinstimmend gewesen sei. Dem gegenüber behauptet Gerhardt[1]), dafs das Rechnen mit horizontalen Linien die graphische Darstellung der chinesisch-mongolischen Rechenmaschine sei, die während des 15. Jahrhunderts durch den Handel nach Deutschland kam. Im Gegensatz zur Rechnung „auf den Linien" nannte man das Ziffernrechnen Rechnung mit der Feder (auff der Feddern), weil man sich beim Ziffernrechnen im allgemeinen der Feder bediente. Der Ausdruck, eine Rechnung in manu ausführen, war im Mittelalter gebräuchlich für unser Kopfrechnen; die Araber sagten dafür in der Luft (hawâï).

Die Zahl (*ἀριθμός*, numerus) ist nach Euklid (VII, def. 2) die aus Einheiten zusammengesetzte Menge, *τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος*. Das Wort *ἀριθμός* entspringt der Wurzel *ἀρ*, in der der Begriff fügen, anreihen liegt[2]); numerus hat die Wurzel *νεμ*, wovon *νέμω*, teile aus, teile zu, daher aufzählen *ἀνανέμεσθαι*[3]).

Die Einer werden von den Griechen *πυθμένες* (*πυθμήν*, der Boden, der Träger, der Stamm, fundus) genannt; sie waren gleichsam die Träger der Zehner, Hunderter etc. oder die fundamentalen Zahlen. Die Zehner heifsen bei Archimedes, Apollonius, Pappus u. a. *οἱ ἀνάλογοι ἀριθμοί*, numeri pertinentes (ad aliquid). Sie beziehen sich gleichsam auf eine bestimmte Stelle[4]). Nach Aussage des Boethius[5]) nannten die Alten die Zahlen 1 bis 9 digiti, Fingerzahlen. Die Benennung erklärt sich ja daraus, dafs die Anfänger beim Zählen die Finger zu Hülfe nehmen. Bei Wolff findet sich der Ausdruck ebenfalls, und in englischen Rechenbüchern werden die Einheiten noch heute digits genannt. Im Gegensatze zu den Fingerzahlen hiefsen die Zahlen höherer Ordnung, also Vielfache von 10, 100, 1000 etc. Gelenkzahlen, articuli. Wir nennen sie heute runde Zahlen; der Ausdruck rotundi numeri kommt schon bei Wolff für articuli vor. Das Wort articulus entspringt derselben Wurzel wie *ἀριθμός*[6]). Beide wurden nach limites abgeteilt. Welche Bedeutung die Worte digitus, articulus, limes bei den Römern der Renaissance hatten, geht aus folgender Stelle in Schoners Algorithmus demonstratus hervor[7]): „Digitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus, qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, et sic in infinitum. Separantur autem digiti et articuli in limites. Limes est collectio novem numerorum, qui aut digiti sunt, aut digitorum aeque multiplices, quilibet sui relativi. Limes igitur primus digitorum. Secundus primorum articulorum. Tertius est secundorum articulorum. Et sic in infinitum." Jede Zahl, die aus Zahlen verschiedener limites bestand, hiefs zusammengesetzte Zahl, numerus compositus; alle anderen waren numeri incompositi.

Das Sexagesimalsystem, das wir beispielsweise bei Ptolemäus finden, stammt von den Babyloniern; von diesen entlehnten es die Inder, und nicht von den Griechen. Die Griechen nahmen erst nach Alexander dieses System für die Einteilung der Stunde und des Grades an. Während aber bie Babylonier auch Vielfache nach dem Sexagesimal-

---

[1]) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877, p. 28 Anm. 2. [2]) G. Curtius, Griech. Etymologie S. 317 nennt *ἀράρισκε*, fügte an, *ἄρμενος*, gefüge, passend, *ἄρσα*, *ἤραρον*, fügte zusammen, *ἄρθρον*, Gelenk, Glied, *ἀρτύω*, füge zusammen, bereite, *ἀρτύς*, *ἀρθμός*, Verbindung, Freundschaft, *ἄρτιος*, gefüge, gerade. [3]) ibid. S. 293. [4]) Pappus, ed. Hultsch, Vol. III Appendix p. 1213. [5]) Boethius, Ars geom. p. 395, 6 sq.: Digitos vero, quoscunque infra primum limitem, id est omnes, quos ab unitate usque ad denariam summam numeramus, veteres appellare consueverunt. [6]) G. Curtius, l. c. ibid. S. 317, artus, Glied, articulus, artus, eng. [7]) Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie etc. 2. éd. Paris 1875, p. 466 Note.

system bildeten (sie nannten 60 Einheiten einen sossos, 60 sossos einen saros)[1]), scheinen die Griechen nur die Teilung nach 60 angenommen zu haben. Die Ganzen, welche bei Ptolemäus einem 120^stel^ des Kreisdurchmessers entsprachen, hiefsen μοῖραι, Grade; sie wurden durch einen griechischen Buchstaben, wie jede andere Zahl, mit einem vertikalen Strich darüber, bezeichnet; später deutete man diese Ganzen durch den Exponenten ° an. Die ersten 60^stel^ hiefsen ἑξηκοστὰ πρῶτα und erhielten das einfache Bruchzeichen ′; die 60^stel^ von diesen hiefsen ἑξηκοστὰ δεύτερα und wurden durch 2 Strichelchen ″ bezeichnet, und so fort. Bei Pappus wird μοῖρα in dem Sinne für Grad, als 360ster Teil der Kreisperipherie gebraucht. Die arabischen Übersetzer des Ptolemäus gaben das griechische μοῖρα wieder durch dergeh (sprich derdscheh) Stufe, Grad, vom Verbum darajah, stufenweise fortschreiten. Das lateinische Wort gradus ist also eine wörtliche Übersetzung aus dem Arabischen; das französische degré und das englische degree ist aber das arabische Wort selbst mit Transposition des g und r. Die ersten 60^stel^ hiefsen in den späteren lateinischen Übersetzungen des Ptolemäus partes minutae primae, die zweiten 60^stel^ partes minutae secundae, etc. Daraus sind die Worte Minute, Sekunde, Tertie entstanden. Die Rechnung mit Brüchen, deren Nenner 60 ist, hiefs die Sexagesimalrechnung, arithmetica seu logistica sexagenaria. Sie war seit den ältesten Zeiten bei astronomischen Rechnungen gebraucht und wurde noch im XV. S. in Deutschland durch Johann von Gmunden gelehrt, der eine Schrift über die Bruchrechnung unter dem Titel 'Tractatus de minutiis physicis' veröffentlichte, die lange Zeit hindurch als kanonisches Lehrbuch für die Vorlesungen an der Wiener Universität diente. Auch Stifel widmete ihr in seiner Arithmetica integra, 1544, eine ausführliche Behandlung. Minutiae physicae wurden die Brüche mit dem Nenner 60 genannt. Diese Sexagesimalrechnung vertrat gleichsam die Stelle unserer Rechnung mit Decimalbrüchen.

Zu den griechischen Mathematikern, nach Byzanz, drang erst im XIV. S. das indische Zifferrechnen, während dasselbe bereits 200 Jahre früher im westlichen Europa bekannt wurde. Die Rechnung mit Decimalzahlen nach der neuen Stellenbezeichnung hiefs Algorithmus. Dieses Wort ist eine ziemlich genaue Transscription des Namens einer Persischen Provinz, Al Khârism oder Khârizm, heutzutage grofsenteils mit dem Lande Khiva vereinigt. Dorther stammte der im ersten Viertel des IX. S. blühende arabische Schriftsteller Muhammed ibn Mûsâ mit dem Beinamen Alchwarizmî. Die Arithmetik, welche dieser Muhammed schrieb, und die für alle arabischen Lehrbücher der Arithmetik und Algebra jener Epoche typisch wurde, ebenso wie später für den Liber Abaci des Leonardo Pisano (1202), beginnt mit den Worten: „Gesprochen hat Algorithmi"; der Beiname des Verfassers Alchwarizmî, der auch die Formen Alchoarismus, Alkauresmus, Alchocharithmus annahm, ist also hier in die Form Algorithmi übergegangen. Diese Form hielt man später für einen lateinischen Genitiv von algoritmus, und die Lateiner gebrauchten libri algorismi oder algoritmi als Titel für Bücher über Rechenkunst. Schon im XIII. S. war jede Tradition von dem Ursprunge dieses Wortes verloren gegangen; denn man stellte schon damals die wunderlichsten Hypothesen für die etymologische Erklärung des Wortes auf[2]). Neuere Gelehrte nahmen an, das griechische Wort ἀριϑμός sei mit dem arabischen Artikel al verbunden, wie in dem Worte Almagest, zwischen

---

1) Friedlein, l. c. p. 81 sq. 2) Siehe Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I, p. 612.

beiden sei aber ein g eingeschoben. Bis in die neuere Zeit verstand man unter Algorithmus das Rechnen mit den 4 Species, oder auch mit den einfachen algebraischen Operationen; doch wird neuerdings das Wort Algorithmus zur Bezeichnung irgend eines regelmäſsigen Rechnungsverfahrens gebraucht. Im Gegensatze zu den Abacisten (siehe oben S. 14) nennt Cantor[1]) diejenigen Schriftsteller, welche den Abacus nicht anwenden, sondern nach arabischem Muster mit Ziffern, die Null einbegriffen, rechnen, Algorithmiker.

Gehen wir nun zu den einzelnen Rechenoperationen über! Die griechischen Ausdrücke *συντιθέναι*, componere, für addieren, und *ἀφαιρεῖν*, auferre, für subtrahieren, weisen deutlich auf das Rechnen mit Steinchen, von dem wir oben gesprochen haben, hin. Planudes nennt die vier ersten Operationen *σύνθεσις*, *ἀφαίρεσις* oder *ἐκβολή*, *πολλαπλασιασμός*, *μερισμός*. Das Wort *παραβάλλειν*, eigentlich heranwerfen, heranlegen, applicare, dem wir später bei den Kegelschnitten wieder begegnen werden, bedeutet eine bei der Division vorzunehmende Operation. Wenn ein Rechteck, das einem gegebenen Rechteck ab gleich ist, an eine gegebene Strecke c herangelegt werden soll (eine Aufgabe, die im VI. Buche der Elemente des Euklid vorkommt), so findet man algebraisch die 2. Seite des gesuchten Rechtecks, indem man das Produkt ab durch c dividiert, geometrisch aber durch Konstruktion der 4. Proportionalen. *παραβάλλειν* heiſst also, das Produkt aus dem gefundenen Quotienten und dem Divisor unter den Dividendus setzen (an den Dividendus heranlegen), um durch Fortnehmen des herangelegten Produktes den Rest zu finden. Noch bei Vieta finden wir in der Isagoge in artem analyticam, cap. 4, den Ausdruck magnitudinem magnitudini adplicare für dividieren, magnitudinem in magnitudinem ducere für multiplicieren, magnitudinem magnitudini subducere für subtrahieren, addere für addieren. Bei den Algorithmikern hieſs die Addition additio oder auch aggregatio, die Subtraktion diminutio oder subtractio oder extractio; duplicatio war Multiplikation mit 2, mediatio Division durch 2; die Multiplikation allgemein hieſs multiplicatio, die Division divisio. Das Resultat der Multiplikation, also das Produkt, nannten sie multiplicationis summa; bei der Division wurde unterschieden numerus, quem volueris dividere, und numerus, super quem vis dividere, wofür erst später (bei Johannes von Sevilla, im XII. S.) dividens numerus und dividendus numerus gebraucht wurden, und im Liber algorizmi (ed. Cantor) divisor für dividens, und quotiens für das frühere egrediens. Bei Wolff wird unterschieden die additio und subductio simplex von der additio und subductio composita; erstere ist die Addition und Subtraktion unbenannter, letztere die benannter Zahlen; bei Ozanam[2]) aber hat der Zusatz simple ou composée zu den Operationen eine etwas andere Bedeutung; ersteres bezieht sich auf unbenannte oder gleichbenannte Zahlen, letzteres auf mehrfach benannte Gröſsen, wie 1 an 3 mois 17 jours.

Was die Zeichen + und — betrifft, so findet Drobisch[3]) dieselben zuerst konsequent angewendet in Widmanns 1489 zu Leipzig erschienenen: „Behēde und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft"[4]). Zu den 4 Species, den einfachsten Rechnungsarten, zählte man bis ins 18. Jhrh. hinein als 5. Species die Numeratio, das Numerieren. Man verstand darunter die Fertigkeit, eine in Ziffern vorgelegte Zahl auszusprechen und eine in Worten dargestellte Zahl durch Ziffern auszudrücken. Wolff sagt: „Weil aber keine andere

---

1) Cantor, l. c. p. 774. 2) Ozanam, Dictionaire mathématique, Amsterdam 1591. 3) In einer Abhandlung über Johannes Widmann Egeranus, Leipzig 1840, p. 20. 4) Boncompagni Bull. IX, 191 sq.

Veränderung mit den Zahlen vorgenommen werden kann, als dafs man sie vermehre oder vermindere, überdies auch nicht mehr als zwei Arten der Vermehrung und zwei der Verminderung möglich sind, so pflegen die Neueren auch nicht mehr als 4 Species zu zählen, nämlich: das Addieren, Multiplicieren, Subtrahieren und Dividieren."

Die auf der Wiener Universität im XIV. und XV. S. gebrauchten, besonders nach arabischen Vorbildern bearbeiteten Algorismi des Johann Halifax de Sacro Bosco († 1256 zu Paris) enthielten folgende Rechnungsarten: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Radicum extractio in quadratis et cubicis. Das erste deutsche Rechenbuch, von Johannes Widmann von Eger 1473 verfafst, das den Titel „Behēde und hubsche Rechnung auff allen kauffmanschafft" trägt, hat folgende Grundoperationen: „Numeracio, Additio, Subtrahiren, Dupliren, Mediren, Multipliciren, Dividiren, Progrediren, Radicem extrahiren." Erst in dem Rechenbuche von Henricus Grammateus, 1518, werden die Duplatio und Mediatio als besondere Rechnungsarten fortgelassen, da sie nichts Anderes als Multiplikation und Division mit 2 seien[1]). Maurolycus, ein italienischer Mathematiker in der 2. Hälfte des 16. Jhrh., nennt die ersten algebraischen Operationen folgendermafsen: coniunctio, subtractio, ductus, divisio und extractio radicum[2]). Die Franzosen des XVI. S. sagten partir für diviser, und parteur oder partisseur für diviseur[3]). Bei Ozanam hat die arithmétique vulgaire ou pratique 6 règles premiers et principales, la Numération, l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division et l'Extraction de Racines, „et tout cela ensemble se nomme Algorithme, ou Logistique Nombreuse, pour la differencier de la Logistique Spécieuse"[4]).

Der Begriff des Quotienten (quotiens, da er angiebt, wievielmal eine Zahl in einer anderen aufgeht,) ist dem ganzen Altertume fremd geblieben. Das, was wir so nennen, fafsten die Alten als Hälfte, Drittel, Viertel u. s. w. auf[5]). Von den Benennungen, die Diophant denjenigen Stammbrüchen, deren Nenner eine Potenz der Unbekannten ist, gab, werden wir in der Algebra zu sprechen haben. Für den praktischen Sinn der Römer ist es charakteristisch, dafs sie für bestimmte Brüche (fractiones, numeri fracti) besondere Zeichen und Namen haben. Bemerkenswert ist, dafs sich bei diesen Brüchen das Duodecimalsystem findet, wie bei den attischen Rechnungen mit Drachmen zu 6 oboli und 12 dimidii oboli[6]). Mit dem Worte as bezeichneten die Römer jedes Ganze, also die Einheit, und die Teile des as wurden als allgemeine Zahlbegriffe angewendet. Für as erscheint auch die Normativform assis, von der Christ[7]) nachgewiesen hat, dafs sie nicht vor dem 3. Jhrh. kann gebräuchlich gewesen sein, vielmehr wahrscheinlich erst nach Constantin aufkam. Wir erwähnen hier die folgenden häufiger gebrauchten Benennungen: $\frac{1}{2}$ semis, $\frac{1}{3}$ triens, $\frac{1}{4}$ quadrans, $\frac{1}{6}$ sextans, $\frac{1}{12}$ uncia, $\frac{11}{12}$ deunx (von de uncia, $1-\frac{1}{12}$), $\frac{5}{6}$ dextans oder decunx (de sextans, $1-\frac{1}{6}$, oder decem unciae), $\frac{3}{4}$ dodrans oder de quadrans ($1-\frac{1}{4}$), $\frac{2}{3}$ bes (duae assis scil. partes), $\frac{7}{12}$ septunx (septem unciae), $\frac{5}{12}$ quincunx (quinque unciae), $\frac{1}{8}$ sescuncia ($1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}$), $\frac{1}{24}$ semuncia, $\frac{1}{48}$ sicilicus, $\frac{1}{72}$ sextula, $\frac{1}{144}$ dimidia sextula, $\frac{1}{288}$ scriptulum. Für weitere vereinzelt vorkommende Bezeichnungen von Brüchen verweisen wir auf die mehrfach citierte Schrift von Friedlein,

---

1) Gerhardt, l. c. p. 37. 2) Boncompagni Bull. IX, 50. 3) Boncompagni Bull. I, 150 Anm. 4) Ozanam, Dictionaire mathématique, Amsterdam 1591, p. 52. 5) Friedlein, l. c. p. 79. 6) Friedlein, l. c. p. 33 sq. 7) Sitzungsber. d. Münch. Ak. 1863, p. 104—107.

p. 33 sq. und p. 59 sq. Erwähnen wollen wir noch, dafs der Ausdruck minutiae für die Bruchteile im allgemeinen zuerst in dem Liber de asse vorkommt, der zwischen 232 und 306 n. Chr. anzusetzen ist. Seit der Zeit des Victorius, der im Jahre 457 n. Chr. eine sogenannte Osterrechnung verfafste, erfuhr die Bruchrechnung eine Erweiterung, indem zu den früheren Namen und Zeichen neue hinzukamen, z. B. solche für $\frac{1}{96}$, $\frac{1}{576}$, $\frac{1}{1152}$, $\frac{1}{1728}$, $\frac{1}{2304}$ u. a. Die Zeichen des Victorius erbten sich durch das ganze Mittelalter fort. Erst seit dem XII. S. verloren sich diese Namen zugleich mit der ganzen Rechnungsweise wieder. Von der Terminologie des Boethius, der die Brüche durch Verhältnisse und Proportionen ersetzte, deren Namen nach griechischem Muster gebildet waren, werden wir in der höheren Arithmetik zu sprechen haben, da diese Ausdrücke besonders in der theoretischen Musik gebraucht wurden.

Im Mittelalter verbreitete sich die praktische Rechenkunst von Italien aus. Wegen dieses ihres Ursprunges wurde die Gesamtheit aller praktischen Rechnungsregeln welsche Praktik genannt, und daher haben wir eine ganze Reihe italienischer Kunstausdrücke im praktischen kaufmännischen Rechnen. Das Wort Tara ist gleichen Stammes wie der arabische Ausdruck für die Subtraktion, ṭarḥ von taraha, wegwerfen. Es bedeutet also das, was als zur Verpackung gehörig, nicht als Wert mitgerechnet werden darf, also abzuziehen ist[1]). Die Regeldetri ist indischen Ursprungs; sie kommt schon bei dem Inder Âryabhaṭṭa (geb. 476 n. Chr.) vor. Wegen ihres grofsen Nutzens wurde sie vielfach die goldene Regel, regula aurea genannt, z. B. von Joh. Widmann, dem Verfasser des schon oben erwähnten ersten deutschen Rechenbuches. Widmann, und ebenso Petrus Apianus, dessen Rechenbuch zuerst i. J. 1527 erschien, haben das Bestreben, die bekannten Regeln, die für einzelne Fälle gelten, zu vermehren. Sie lehren[2]) u. a. die regula inventionis, d. h. gewöhnliche Regeldetri, die zwiefach Regeldetri (zusammengesetzte Regeldetri), regula fusti (Bruttorechnung), regula detri conversa (umgekehrte Regeldetri), regula ligar und regula legis (Mischungsrechnungen), regula quadrata (Flächenrechnung), regula cubica (Inhaltsrechnung), regula pagamenti (Müntzschlag, d. h. Münzrechnung mit Hülfe der Kettenrechnung), regula alligationis (Mischungsrechnung), Regel vom Stich (Warentausch), ein Gesellschaft (Gesellschaftsrechnung), regula falsi, „von etlichen regula augmenti et decrementi auch zu zeiten regula positionum genandt“, und regula virginum, „die etlich nennen Cecis“. Die Regula falsi besteht darin, dafs man statt der wirklichen Lösung einen willkürlich angenommenen Wert in die Aufgabe einsetzt und das erhaltene Resultat mit dem geforderten vergleicht. Sie ist sehr alt und wurde vor der Kenntnis der Auflösung der Gleichungen ersten Grades vielfach angewandt. Es ist dasselbe Verfahren, das man noch jetzt bei der näherungsweisen Lösung höherer Gleichungen anwendet. Von der regula cöci, die auch regula virginum und regula potatorum hiefs, sagt Klügel[3]): „Sie heifst Regel Cöci entweder, weil die Rechner, welche darauf fielen, die Auflösung durch Versuche und Herumtappen suchten, oder von dem unbekannten Worte Zekis, das in Cöci verwandelt wurde.“ Die Aufgabe, bei welcher diese Regel angewendet wird, ist die, eine lineare unbestimmte Gleichung mit 3 oder mehreren Unbekannten zu lösen, deren Summe bekannt ist. Die oben genannte Alligationsrechnung, Mischungsrechnung, règle d'alliage, löst die Aufgabe, zwei oder mehrere Dinge von verschiedenem Werte

[1]) Cantor, l. c. p. 696. [2]) Gerhardt, l. c. p. 32 u. 43, 44. [3]) Klügel, Wörterbuch IV, 268.

so untereinander zu mischen, dafs ihre Verbindnng (alligatio) einen bestimmten Wert erhält. —

Die Zahl, im ursprünglichen oder natürlichen Sinne, ist ein willkürlich von uns geschaffenes Zeichen, um auszudrücken, wie oft ein Ding als wiederholt vorhanden gedacht wird. Der Begriff der Zahl im allgemeinen, welche das Objekt der höheren Arithmetik ist, wird erst in dieser Disciplin selbst entwickelt und erfährt in ihr eine fortwährende Erweiterung.

Euklid[1]) definiert: *Ἀριθμὸς τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος;* und diese Definition ist gewifs sehr alt. Vergleichen wir hiermit eine moderne Erklärung der Zahl. H. Hankel[2]) nennt solche Zahlen, deren Begriff ein vollkommen bestimmter ist, die aber keiner Konstruktion in der Anschauung fähig sind, rein formale, im Gegensatz zu den aktuellen Zahlen, und definiert: „Die (aktuelle) Zahl ist der begriffliche Ausdruck der gegenseitigen Beziehung zweier Objekte, soweit dieselbe quantitativen Messungen zugänglich ist“, und „Eine (rein formale) Zahl ist der Ausdruck gewisser formaler Beziehungen beliebiger Objekte zu einander; ein Zahlensystem stellt eine systematisch geordnete Reihe solcher Beziehungen oder Verknüpfungen dar, deren Wesen den Charakter des Zahlensystems ausmacht“. Die Pythagoräer, die ja in den Zahlen das Wesen, das Princip aller Dinge sahen, förderten die Arithmetik in rein theoretischem Interesse. Von ihnen stammt die Einteilung der Zahlen in Gattungen. Sie unterschieden gerade und ungerade Zahlen, *ἄρτιοι* und *περισσοί*[3]), Quadratzahlen (*τετράγωνοι*) und Nicht-Quadratzahlen. Denjenigen geraden Zahlen, deren beide Faktoren um 1 differieren, $n(n+1)$, die sich ihnen als Summe der geraden Zahlen 2 bis $2n$ ergaben, legten sie einen besonderen Wert bei und nannten sie *ἑτερομήκεις*, ungleichseitige (von *ἕτερος*, andere, und *μῆκος*, Länge). Im Gegensatz dazu nennt Nikomachus[4]) eine Zahl, deren beide Faktoren um mehr als 1 sich unterscheiden, *ἀριθμὸς προμήκης*, und an einer Stelle[5]) die Quadratzahlen *ἰδιομήκεις* oder *ταυτομήκεις*. Die heteromeke Zahl nannten die Lateiner später numerus altera parte longior, die Franzosen nombre barlong (ungleich lang), was verdeutscht barlongische Zahl wurde. Weitere Gruppierungen und Definitionen schuf die Platonische Schule. Euklid[6]) unterscheidet grademal gerade, grademal ungerade und ungerademal ungerade Zahlen, *ἀρτιάκις ἄρτιοι*, *ἀρτιάκις περισσοί*, *περισσάκις περισσοί*. Nikomachus (100 n. Chr.) hat 3 Klassen (*εἴδη*) von geraden Zahlen: *ἀρτιάκις ἄρτιοι* (2^n), *ἀρτιοπέριττοι* ($4m+2$), *περισσάρτιοι* [$2^{n+1}(2m+1)$][7]). Diese Ausdrücke übersetzte Boethius († 524), der einflufsreichste Lehrer des Mittelalters, mit den Worten: pariter par, pariter impar, impariter par, woher die deutschen Adjectiva paarpaar, paarunpaar und unpaarpaar stammen, die man noch in diesem Jahrhundert anwendete. Die Primzahl heifst bei Euklid[8]) *πρῶτος ἀριθμός*, bei Nikomachus[9]) und Theon von Smyrna

---

1) Euklid, Elementa lib VII, def. 2; vorhergeht: *Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.*
2) H. Hankel. Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867, p. 6 und 36.
3) Euklid, lib. VII, def. 6 u. 7: *Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος; περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.*
4) Nikomachus, Introductio arithmetica, ed. Hoche, Leipzig 1886, lib. II, 17, 1, p. 108.
5) Nikomachus, lib. II, 18, 3, p. 113.
6) Euklid, lib. VII, def. 8, 9 u. 11.
7) Nikomachus definiert dieselben mit der ihm eigenen Weitschweifigkeit lib. I, 8, 4, p. 15; I, 9, 19, p. 19; I, 10, 1, p. 21.
8) Euklid, lib. VII, def. 12: *πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.*
9) Nikomachus, lib. I, 11, 2, p. 26: *Τὸ μὲν οὖν πρώτιστον εἶδος τὸ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον γίνεται, ὅταν ἀριθμὸς περισσὸς μόριον μηδὲν ἕτερον ἐπιδέχηται, εἰ μὴ τὸ παρώνυμον ἑαυτῷ, ὃ καὶ ἐξ ἀνάγκης μονὰς ἔσται.* Bei ihm war also 2 keine Primzahl.

aber *πρῶτος καὶ ἀσύνθετος*, primus et incompositus (Boethius); im Gegensatze dazu hiefs die zusammengesetzte Zahl *σύνθετος* bei Euklid[1]), *δεύτερος καὶ σύνθετος* bei Nikomachus[2]). Nach Aussage des Jamblichus (Comment. in Nicomachum) nannte Thymaridas die Primzahlen *εὐθυγραμμικοί*, geradlinige, weil sie allein sich nicht als Flächen darstellen lassen. Bei Nikomachus heifst es[3]): Jede Zahl von 2 ab kann als lineare Zahl, *ἀριθμὸς γραμμικός*, numerus linearis, angesehen werden. Die Pythagoräer bildeten auch zuerst die sogenannten Dreieckszahlen, *ἀριθμοὶ τρίγωνοι*, indem sie die Zahlen 1, 2, 3... addierten. Nikomachus[4]) definiert: *Τρίγωνος μὲν οὖν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ διαλυόμενος εἰς μονάδας καὶ τὴν κατ' ἐπίπεδον θέσιν τῶν μορίων ἰσόπλευρον σχηματογραφῶν εἰς τριγωνισμόν*, und versinnlicht diese Zahlen durch gleichseitige Dreiecke, in welche er, von der Spitze ausgehend, auf einzelnen zur Basis parallelen Teilen die Einheit α resp. 1, 2, 3 etc. mal setzt. In dieser Bezeichnung, sowie in mehreren anderen Zahlenbenennungen, finden wir die den Griechen eigentümliche Neigung, sich die nach unsrer heutigen Auffassung abstrakten Zahlbegriffe figürlich zu versinnlichen. Hierfür charakteristisch sind die Ausdrücke lineare Zahl, Flächen- und Körperzahl (*ἀριθμοὶ γραμμικοί*, numeri lineares, *ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι*, numeri plani, und *ἀριθμοὶ στερεοί*, numeri solidi), deren Ursprung bis auf die Pythagoräer zurückzuführen ist. Die Erklärung der Flächen- und Körperzahlen als Produkte aus 2 resp. 3 Faktoren findet sich bei Euklid, Lib. VII[5]). Die Faktoren hiefsen Seiten, *πλευραί;* daher bei den Lateinern der Ausdruck latus potentiae. Nicht allein Euklid, Nikomachus und Boethius, sondern selbst noch die italienischen und deutschen Algebraisten des XVI. S. stützten sich bei den Beweisen rein arithmetischer Sätze auf die Geometrie und wählten geometrische Benennungen für rein arithmetische Begriffe. Wir finden noch bei Wolff für ein Produkt aus 4 Faktoren die Bezeichnung „doppelte Flächenzahl, numerus plane planus", und für ein solches aus 5 Faktoren: „Flächen-Körperzahl, numerus plane solidus oder surdesolidus". Euklid[6]) definiert ähnliche Flächen- und Körperzahlen als solche, deren Seiten (Faktoren) in gleichem Verhältnis stehen[7]). Unter einer länglichten Zahl (numerus oblongus) verstand man ein Produkt von 2 ungleichen Faktoren. Dem Produkt aus 3 gleichen Faktoren, dem Cubus, *κύβος*, entgegengesetzt ist ein solches von 3 ungleichen Faktoren; dieses wurde Keilzahl *σφηνίσκος* (dim. von *σφήν*, Keil), cuneus oder cuneolus, sphenische Zahl, genannt. Nach Nikomachus[8]) nennen einige diese Zahl auch *σφηκίσκος*, was wört-

---

[1]) Euklid, lib. VII, def. 14. [2]) Nikomachus, lib. I, 12, 1, p. 27. [3]) ib lib. II, cap. 7. [4]) Nikomachus, lib. II, 8, 1, p. 87. [5]) Euklid, lib. VII, def. 17 u. 18: *Ὅταν δὲ δύο (τρεῖς) ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος (στερεὸς) καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.* [6]) Euklid, lib. VII, def. 21: *Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.* [7]) Also 2 Flächenzahlen $\mathrm{n} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$ und $\nu = \alpha\beta$ sind ähnlich, wenn $\mathrm{a} : \alpha = \mathrm{b} : \beta$, und 2 Körperzahlen $\mathrm{n} = \mathrm{abc}$ und $\nu = \alpha\beta\gamma$ sind ähnlich, wenn $\mathrm{a} : \alpha = \mathrm{b} : \beta = \mathrm{c} : \gamma$ ist. 2 ähnliche Flächenzahlen geben als Produkt ein Quadrat (Euklid IX, 1), und umgekehrt sind alle Flächenzahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist, ähnlich. Wenn $\mathrm{n} \cdot \nu = \mathrm{z}^2$ und n und ν selbst Quadrate, so versteht sich der Satz von selbst; ist andernfalls $\mathrm{n} = \mathrm{x}^2\alpha$, $\nu = \mathrm{y}^2\alpha$, so braucht man diese Zahlen nur in der Form $\mathrm{n} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}\alpha$, $\nu = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}\alpha$ zu schreiben, um zu sehen, dafs sie ähnlich sind. Das Citat des Herrn Cantor S. 157 kann leicht zu dem unwahrscheinlichen Schlufs führen, dafs Theon von Smyrna bereits die Identität beider Definitionen gekannt habe, die überdies für Körperzahlen nicht mehr gilt. [8]) Nikomachus, Institutio arithmetica, lib. II, 16, 2, p. 107, woselbst noch andere weniger gebräuchliche Benennungen specieller Körperzahlen sich finden. Boethius, Instit. arithm. 121, 3 gebraucht sowohl das Wort spheniscus, wie auch cuneolus.

lich ein dem Wespenstachel ähnlich zugespitztes Bauholz bedeutet, andere aber auch βωμίσκος (dim. von βωμός, Altar), verdeutscht Stufen- oder Altarzahl. Zwischen dem Cubus und den ungleichseitigen Körperzahlen, στερεὰ σκαληνά, stehen die parallelepipedischen Zahlen, ἀριθμοὶ παραλληλεπίπεδοι[1]), von deren 3 Faktoren 2 einander gleich sind, die also von der Form $a^2 b$ sind. Der Ausdruck parallelogrammische Zahl kommt bei den Griechen nicht vor; er ist wohl späteren Ursprungs; eine parallelogrammische Zahl hat nach Wolff die Form $n(n+a)$, wo $a \gtreqless 2$ ist. Mit dem Namen Pronische Zahl bezeichneten Cardan, Vieta und andere Arithmetiker Zahlen von der Form $a^n + a$; je nachdem die 2., 3. oder 4. Potenz einer Zahl zur letzteren hinzuaddiert wurde, nannte Vieta die Summe pronicum minus, medium, majus. a heifst die pronische Wurzel; sie spielte in der Theorie der Gleichungen eine Rolle.

Der Neupythagoräer Theon von Smyrna beschäftigte sich mit den sogenannten Seiten- und Diametralzahlen, πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί. Diese entstehen auf folgende Weise. Aus 2 Einheiten wird durch Addition derselben $(1+1)$ die Seitenzahl (2) und durch Addition der doppelten ersten Einheit zur zweiten $(2 \cdot 1 + 1)$ die Diametralzahl (3) gebildet; die Summe einer Seite und ihrer Diametralzahl $(2+3)$ gibt dann die folgende Seite (5), die Summe der doppelten Seite und ihrer Diametralzahl $(2 \cdot 2 + 3)$ gibt die folgende Diametralzahl (7), und so fort. Die Seitenzahlen (α_n) und die Diametralzahlen (δ_n) genügen den Bildungsgesetzen:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}, \quad \delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} \quad (\alpha_1 = \delta_1 = 1);$$

sie liefern $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ als Näherungswert von $\sqrt{2}$[2]). In ganz anderem Sinne nennt Stifel (Arithmetica integra, I) Diametralzahl ein Produkt aus 2 Faktoren, deren Quadratsumme ein vollständiges Quadrat ist. Die Wurzel dieses Quadrates heifst Diameter; denn sie ist Durchmesser des alle rechtwinkligen Dreiecke enthaltenden Kreises.

Hypsikles (um 180 v. Chr.) gab eine allgemeine Definition der Vielecks- oder Polygonalzahlen, πολύγωνοι ἀριθμοί. Sie hiefsen der Reihe nach ἀριθμὸς τρίγωνος, τετράγωνος, πεντάγωνος etc., dreieckige, viereckige, fünfeckige Zahl. Die n^{te} p-eckige Zahl ist, nach heutiger Definition, die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz p-2 ist. Aus ihren Einheiten lassen sich ähnliche gleichseitige Polygone mit gemeinschaftlicher Ecke netzförmig zusammensetzen; daher der Name Polygonalzahl. Ihre Einheiten wurden von den Alten Gnomone genannt. Das Wort γνώμων, in eigentlicher Bedeutung „Erkenner", da es die Wurzel γνω hat, die in γιγνώσκω, erkenne liegt, war ursprünglich ein Kunstwort der praktischen Astronomie und bedeutete den senkrechten Stab, welcher durch seinen Schatten die Zeit erkennen liefs, also den Zeiger an der Sonnenuhr. Das lat. norma, welches der Bedeutung nach = γνώμων, wird von Benfey aus gnorima gedeutet[3]). Das Fremdwort groma ist aus γνώμων durch Übergang des n in r entstanden[4]). Später bekam Gnomon eine geometrische Bedeutung. Schon die Pythagoräer verstanden darunter diejenige geometrische Figur, welche übrig bleibt, wenn man an einer Ecke eines Quadrats ein kleineres Quadrat herausschneidet. Diese Form hat ein massiver rechter Winkel, welcher

[1]) Nikomachus, II, 16, 3, p. 108. [2]) Über die geometrische, also wahrscheinlich echt griechische Entstehung dieses Bildungsgesetzes s. eine geistreiche Vermutung von Paul Bergh, Schlömilch Z. XXXI, Hist. Lit. A. 135. [3]) G. Curtius, Grundz. der griechischen Etymologie, S. 169. [4]) ib. S. 657.

zur Errichtung des senkrechten Stabes gedient haben mag. Nach Euklid[1]) wird zur Erzeugung eines Gnomon anstatt des Quadrates ein beliebiges, auch schiefwinkliges Parallelogramm genommen, so dafs wir jetzt folgendermafsen definieren können. Die beiden Parallelen, welche man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms zu seinen Seiten zieht, teilen das Parallelogramm in 4 Parallelogramme; nimmt man von diesen das eine von der Diagonale durchschnittene Parallelogramm fort, so erhält man ein Gnomon. Hero von Alexandrien definierte noch allgemeiner[2]): „Alles, was zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt, das Ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heifst Gnomon.“ Aus dieser Erklärung wird die Angabe des Aristoteles (Physic. III, 4) verständlich, dafs die Pythagoräer die Quadratzahlen gebildet hätten, indem sie die Gnomone allmählich zur Einheit hinzufügten. D. h. sie ergänzten das Quadrat mit den Seiten 1 successive zu einem Quadrat mit der Seite 2, 3 etc., indem sie die ungeraden Zahlen als Gnomone um die Quadratzahlen 1, 4, 9 etc. herumsetzten, und gelangten so zu dem Satze, dafs die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ist.

Ebenso wie die Polygonalzahlen wurden auch geometrisch die Pyramidal- und Polyedralzahlen gebildet. Nikomachus[3]) nennt an einer Stelle die Pyramidalzahl *ἀριθμὸς πυραμοειδής*, sonst immer *πυραμίς*; er unterscheidet *πυραμὶς τρίγωνος, τετράγωνος* etc.[4]) Die n^{te} p-seitige Pyramidalzahl entsteht durch Summation der n ersten p-eckigen Zahlen; ihre Einheiten lassen sich zu einer p-seitigen Pyramide zusammenstellen. Analog ist die Polyedralzahl aus den Polygonalzahlen so gebildet, dafs die Einheiten zu ähnlichen Polyedern mit einer gemeinschaftlichen Ecke gruppiert werden können. Die Arithmetiker des XVII. S. gaben jeder Polygonalzahl und jeder Polyedralzahl einen besonderen Namen. Je nachdem $p = 3, 4, 5, 6$ etc. ist, nannte man die Polygonalzahl Trigonal-, Tetragonal-, Pentagonalzahl-, Hexagonalzahl etc.; ebenso unterschied man Tetraedral-, Hexaedralzahlen u. s. w. Maurolycus nannte das Produkt aus einer Polygonalzahl in ihre Seitenzahl Kolumnarzahl oder Säulenzahl. Eine Pyrgoidalzahl (*πυργοειδής*, turmähnlich, von *πύργος*, Turm), ist die Summe einer Kolumnarzahl und einer Pyramidalzahl derselben Gattung. Nikomachus[5]) hat besondere Namen für die abgekürzten Pyramidalzahlen; er nennt sie *κόλουροι* (abgestutzte), wenn die Einheit fehlt, *δικόλουροι*, wenn die Einheit und die darauf folgende Polygonalzahl fehlen, *τρικόλουροι*, wenn die Einheit und die beiden darauf folgenden Polygonalzahlen fehlen u. s. f. Später legte man den verschiedenen Gattungen der Pyramidal- und Kolumnarzahlen besondere Namen bei, die meistens zwar richtig zusammengesetzt, aber sehr lang wurden. Der Name „numerus figuratus“, figurierte Zahl, findet sich zuerst in der Arithmetik des Boethius; er ist die wörtliche Übersetzung von *ἀριθμὸς σχηματογραφθείς*, was Nikomachus[6]) an einer Stelle gebraucht.

Ob, wie Jamblichus erzählt, Pythagoras selbst die sogenannten befreundeten Zahlen gebildet habe, ist sehr zweifelhaft. Diese Benennung für 2 solche Zahlen, deren jede gleich der Summe der aliquoten Teile der anderen ist (z. B. 284 und 220), rührt wahrscheinlich von den Arabern her, die an eine wunderbare Wirkung dieser Zahlen glaubten und sie als Talismane benutzten. Der Araber Tâbit ibn Kurra (836—901) war

---

[1]) Euklid, lib. II, def. 2. [2]) Cantor, l. c. p. 137. [3]) Nikomachus, lib. II, 15, 1, p. 105. [4]) ib. lib. II, 13, 2, p. 99. [5]) Nikomachus, lib. II, 14, 5, p. 104. [6]) Nikomachus, II, 17, 1, p. 108.

der erste, der eine Vorschrift zu ihrer Auffindung gab. Die Griechen kannten wohl nur den Begriff und das Bildungsgesetz der vollkommenen Zahlen, ἀριθμοὶ τέλειοι, d. h. derjenigen, die gleich der Summe ihrer aliquoten Teile sind (z. B. 6, 28, 496)[1]. Boethius[2] nennt sie 'virtutis aemulatores'. Theon von Smyrna unterschied vollkommene Zahlen (ἀριθμοὶ τέλειοι, numeri perfecti), überschiefsende oder überflüssige Zahlen (ἀριθμοὶ ὑπερτέλειοι oder ὑπερτελεῖς, numeri abundantes oder superflui) und mangelhafte Zahlen (ἀριθμοὶ ἐλλιπεῖς, numeri deficientes oder deminuti oder imperfecti), je nachdem die Summe der aliquoten Teile einer Zahl gleich, gröfser oder kleiner als die Zahl selbst war[3]. Die Ausdrücke n. abundans, überschiefsende Zahl, und n. deficiens (ohne Übersetzung) finden sich noch bei Klügel[4]. Die Ausdrücke mangelhafte und überflüssige Zahl treten später in ganz anderer Bedeutung auf; bei Wolff finden sich die schwerfälligen Bezeichnungen: „gleich gleiche mangelhafte Zahl", numerus aequaliter aequalis deficiens, und „gleich gleiche überflüssige Zahl", numerus aequaliter aequalis abundans, für Produkte von der Form $a^2 b$, wo $b <$ resp. $> a$ ist.

Cyklische Zahlen, ἀριθμοὶ κυκλικοί, numeri cyclici, nannten die griechischen Mathematiker des V. S. v. Chr. solche, deren Quadrat mit derselben Endziffer endete, wie die Grundzahl, z. B. $5^2 = 25$, $6^2 = 36$. Sie hofften durch diese Zahlen auf die Lösung der seit Anaxagoras versuchten Quadratur des Kreises zu gelangen, doch waren diese Versuche nichts als sophistische Wortklaubereien. Für diese Zahlen hatten spätere Arithmetiker, wie Nikomachus, auch die Namen Kugelzahl, σφαιρικὸς ἀριθμός, numerus sphericus[5], Circulzahl oder Kreiszahl.

Wir haben im vorstehenden eine Reihe von Benennungen für Zahlen kennen gelernt, deren Absonderung ganz willkürlich war und für die Erkenntnis des Wesens der Zahlen nur von geringem Nutzen sein konnte. Erklärlich ist, dafs die meisten dieser Kunstausdrücke überflüssig wurden, seitdem die höhere Arithmetik entstand.

Kegelschnitte und andere geometrische Örter.

Ein geometrischer Ort, im heutigen Sinne, ist eine Folge von Punkten, welche eine bestimmte, keinem aufserhalb dieses Ortes liegenden Punkte zukommende Eigenschaft haben, oder, im Sinne der alten Geometer gesprochen, eine Linie, deren Punkte in gleicher Weise geeignet sind, ein unbestimmtes geometrisches Problem zu lösen. Dafs der Begriff des geometrischen Ortes bereits dem Pythagoräer Archytas von Tarent geläufig war, ist nicht zweifelhaft; doch war das Wort τόπος, Ort, zu seiner Zeit wohl noch nicht zur Bedeutung eines Fachausdruckes gelangt[6]. In der Bedeutung geometrischer Ort kommt es bei dem Peripatetiker Eudemus von Rhodos vor. Durch die Betrachtung der geometrischen Örter schuf Plato eine Geometrie, welche wesentlich über die bisher behandelten elementaren Probleme hinausging und deshalb von seinen Schülern transcendente

[1]) Euklid, lib. VII, def. 22 Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν. Vgl. auch IX, pr. 36. [2]) Boethius, Instit. arithm. p. 41, 6. [3]) Nikomachus behandelt dieselben lib. I, 14—16. [4]) Klügel, Wörterbuch, I, vom Jahre 1803. [5]) Nikomachus nennt die Quadrate solcher Zahlen κυκλικοί, die höheren Potenzen aber σφαιρικοί; lib. II, 17, 7, p. 111 u. 112. Boethius, Instit. arith. 121, 8—11. [6]) Cantor, l. c. S. 197.

Geometrie genannt wurde. Nach Pappus[1]) unterschied man verschiedene Arten von Kurven oder laufenden Örtern, *τόποι διεξοδικοί* (von *διέξοδος*, Ausgang, Umlauf) loci geometrici ex transitu puncti vel lineae vel superficiei geniti, im Gegensatz zu *τόποι ἐφεκτικοί*, loci geometrici fixi, nämlich erstens ebene Örter, *τόποι ἐπίπεδοι*, loca plana, Gerade und Kreis, zweitens körperliche Örter, *τόποι στερεοί*, loca solida, die Kegelschnitte, so genannt, weil sie nicht in der Ebene, sondern an Körpern durch ebene Schnitte erzeugt werden, und drittens lineare Örter, *τόποι γραμμικοί*, loca surdesolida, die weder gerade Linien noch Kreise noch Kegelschnitte sind. Letztere nannte man nach ihrer Erzeugungsweise auch mechanische. Je nachdem die Lösung einer Aufgabe die eine oder die andere Art von geometrischen Örtern erforderte, hiefs das Problem ein ebenes oder ein körperliches, *πρόβλημα ἐπίπεδον* und *πρόβλημα στερεόν*. Diese Benennungen sind nicht so alt, wie die der „körperlichen Örter" und „ebenen Örter", die schon in besonderen Schriften von Aristäus und Apollonius vorkommen[2]). Eine von den Mathematikern des Altertums vielfach gebrauchte mechanische Operation war die *νεῦσις*, wörtlich die Neigung, welche darin besteht, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, dafs zwischen zwei gegebenen Linien ein Stück von gegebener Länge abgeschnitten wird.

Veranlassung zur Entdeckung dieser geometrischen Örter war die Beschäftigung mit den berühmten drei Problemen der griechischen Mathematiker, die für die Geschichte der Mathematik so bedeutungsvoll geworden sind. Wir meinen 1) die Quadratur des Cirkels, *ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου*, quadratura circuli, welche bereits von den alten Ägyptern versucht wurde, 2) die Dreiteilung des Winkels, *ἡ τριχοτομία τῆς γωνίας*, trisectio, welche seit dem V. Jahrh. die alten Geometer beschäftigte, und 3) das delische Problem, oder die Verdoppelung des Würfels, *ὁ διπλασιασμὸς τοῦ στερεοῦ*, duplicatio cubi. Hippokrates von Chios soll das letztgenannte Problem auf die Aufgabe zurückgeführt haben: zu zwei gegebenen Gröfsen zwei mittlere Proportionalen (*τὰς δύο μέσας*) zu finden. Aus der fortlaufenden Proportion $a : x = x : y = y : 2a$ folgt nämlich $x^3 = 2a^3$. Den Namen delisches Problem erhielt dasselbe, als das Orakel den Deliern Befreiung von der Pest verhiefs, wenn sie den Altar des Gottes so verdoppelten, dafs die Würfelgestalt erhalten bliebe, und die Delier in ihrer Verlegenheit die Platonische Akademie um Rat fragten.

Bei seinen Versuchen der Würfelverdoppelung erfand Menächmus, ein Schüler des Plato und des Eudoxus, die Kegelschnitte. Nach ihrem Erfinder wurden sie, wie Proklus berichtet, von Eratosthenes und Geminus die Menächmischen Triaden, *Μεναιχμεῖαι τριάδες*, genannt. Menächmus selbst nannte sie den Schnitt des spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels (*ἡ τοῦ ὀξυγωνίου, ὀρθογωνίου, ἀμβλυγωνίου κώνου τομή*), nämlich mit einer Ebene, die auf einer Seite dieser drei Kegel, oder (im Sinne der Alten gesprochen) auf der Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks, senkrecht steht. Diese Bezeichnung, die, wie Pappus[3]) angiebt, von Aristaios herrührt, ist charakteristisch für die Vorsicht der Griechen bei der Wahl neuer Kunstausdrücke. Das Buch des Archimedes über die Quadratur der Parabel trug die Über-

[1]) Pappus, VII, praefatio, p. 662 u. 672. [2]) H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886, S. 227. [3]) Pappus, lib. VII, 30, p. 672.

schrift *περὶ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*[1]); in dieser wie in den übrigen Schriften gebraucht Archimedes nur die ältere Bezeichnung; das Wort *ἔλλειψις*, das sich an 3 Stellen der Handschrift findet, ist überall als unecht zu entfernen[2]). Schon früher hatte die Ellipse ihren eigenen alten namen *θυρεός*, womit bei Bauten ein den Ausgang verschliefsender Stein, Thürstein, benannt wurde. Heiberg[3]) schreibt diese Namengebung dem Menächmus zu, und Zeuthen[4]) wird durch diesen Namen auf die Vermutung geführt, dafs die Ellipse vorher schon bei den Griechen, in deren Baukunst der Cylinder so häufig vorkommt, als Cylinderschnitt bekannt war. Später zeigte Apollonius von Pergä, dessen Blütezeit in das Ende des III. S. fällt, in seinem Hauptwerke: 8 Bücher der Kegelschnitte (*κωνικά*), dafs alle drei Arten aus jedem Kegel entstehen könnten, und gab den Kegelschnitten den Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel. Der Name Ellipse kommt schon bei Aristoteles vor, der aber noch die Entstehung der drei Kurven auf drei Kegel zurückführte. Die drei Namen Ellipse, *ἔλλειψις*, Hyperbel, *ὑπερβολή*, und Parabel, *παραβολή*, stammen von drei Aufgaben über Flächenanlegung, womit, wie Eudemus[5]) berichtet, bereits die Pythagoräer sich beschäftigten. Das Anlegen einer Fläche, *ἡ παραβολὴ τοῦ χωρίου*, applicatio spatii, hiefs die Aufgabe, an einer gegebenen Strecke eine Figur zu entwerfen (*παραβάλλειν*, applicare), d. h. über einer Geraden von gegebener Länge ein Dreieck oder ein Parallelogramm zu konstruieren, das einer gegebenen Figur an Flächeninhalt gleich ist[6]). Die beiden anderen Aufgaben waren Modifikationen der ersten und lauteten: An eine gegebene Strecke ein Parallelogramm anzutragen, das kleiner oder gröfser ist (*ἐλλείπει*, *ὑπερβάλλει*,) als eine gegebene geradlinige Figur, und zwar um ein Parallelogramm von gleicher Höhe, das einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist[7]). Der Zusammenhang dieser 3 Aufgaben mit den Kegelschnitten erhellt für uns sofort, wenn wir in ihnen die gegebene Figur durch ein Quadrat, die anzulegenden Parallelogramme aber durch Rechtecke ersetzen und für das Fehlende (*ἔλλειψις*)[8]) und den Überschufs (*ὑπερβολή*) ein Quadrat nehmen. Die Lösungen unserer drei Aufgaben sind alsdann in den 3 bekannten Gleichungen $px = y^2$, $px \mp (cx)^2 = y^2$ enthalten, wo p die gegebene Strecke, y^2 das gegebene Quadrat ist. Pappus[9]) drückt den Zusammenhang der 3 Aufgaben mit den Kegelschnitten in folgenden Worten aus: *Χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ἀμβλυγωνίου ὑπερβάλλον τετραγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον* (denn die an eine gegebene Linie angelegte Fläche ist bei dem Schnitt des spitzwinkligen Kegels um ein Quadrat zu klein, bei dem des stumpfwinkligen aber um ein Quadrat zu grofs, bei dem des rechtwinkligen hingegen weder zu klein noch zu grofs).

Während die Alten die Kegelschnitte als körperliche Örter betrachteten, definierte Descartes (1537) dieselben als Kurven, deren Gleichung, in Koordinaten ausge-

---

1) Archimedis Opera, ed. Heiberg, II, 295. 2) Heiberg, Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte, Schlömilch Z. XXV, Hist.-lit. Abt. p. 43. 3) Heiberg, Litterargeschichtliche Studien über Euklid, S. 88. 4) Zeuthen, l. c. p. 466. 5) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, ed. Friedlein, Leipzig 1873, p. 419. 6) Eine solche Aufgabe wird von Euklid, lib. I, pr. 44 behandelt: *Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραλαβεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.* — In der Bedeutung „Anlegen“ eines Rechtecks an eine Strecke kommt das Wort *παραβολή* bei Pappus mehrmals vor. 7) Euklid, lib. VI, pr. 28 u. 29. 8) *ἔλλειψις*, negative Differenz, bei Pappus VII, 968, 11. 9) Pappus, lib. VII, p. 674, 8—12. — Siehe auch Apollonii Conica, lib I, pr. 11—13.

drückt, vom 2. Grade ist. Erst de la Hire (1640—1718) benutzte die längst bekannte Eigenschaft der Punkte einer Ellipse und Hyperbel, dafs die Summe, resp. Differenz ihrer Entfernungen von zwei Punkten, den beiden Brennpunkten, konstant ist, und die entsprechende Eigenschaft der Parabel, dafs ihre Punkte gleichen Abstand von einer Geraden, der Leitlinie oder Directrix, und von einem Punkte, dem Brennpunkte, haben, um die Kegelschnitte als geometrische Örter zu definieren und auf Grund dieser Definition eine neue Theorie derselben zu entwickeln [1]).

Mehrere auf die Kegelschnitte bezügliche und noch heut gebräuchliche Termini finden wir in den vier Büchern der Kegelschnitte des Apollonius (*Ἀπολλωνίου Περγαίου κωνικῶν βιβλία δ'*); doch sind einzelne Bezeichnungen aus der älteren Schrift des Archimedes über Konoide und Sphäroide (*περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*) schon hier zu erwähnen. Archimedes nennt die Axe der Parabel nicht *ἄξων* sondern *διάμετρος;* jeder andere Durchmesser heifst bei Archimedes *παρὰ τὰν διάμετρον*, d. h. die zur Axe parallele Gerade, bei Apollonius *διάμετρος.* Die Haupt- und Nebenaxe der Ellipse heifsen bei Archimedes *μείζων* und *ἐλάσσων διάμετρος*; letztere wird der ersteren zugeordnet, *συζυγής*, conjugata, genannt. Das Wort *συζυγής* wurde auch für andere Linien in der Ellipse gebraucht und hatte wohl schon zu Archimedes' Zeiten denselben Umfang, als bei Apollonius [2]). Die Durchschnittspunkte der Kurve mit den Axen, oder die Endpunkte der Axen, also die Scheitel, werden *κορυφαί* genannt, der Mittelpunkt des Kegelschnittes *τὸ κέντρον.* Die Asymptoten der Hyperbel sollen schon dem Menächmus bekannt gewesen sein; Archimedes nennt sie *αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς*, d. h. die am engsten an die Hyperbel sich anschliefsenden Geraden, eine Bezeichnung, die treffender ist als die später von Apollonius gewählte *αἱ ἀσύμπτωται* (von *ἀ — συν — πίπτω*), die mit der Curve nicht zusammenfallenden Geraden, deren es unendlich viele giebt, wenn man nicht die konjugierte Hyperbel hinzunimmt [3]). Non coincidentes übersetzten spätere Mathematiker, z. B. Maurolycus in seiner Ausgabe des Archimedes, wörtlich. Von Apollonius rührt der Begriff des Mittelpunktes eines Kegelschnittes her, d. h. desjenigen Punktes, in dem alle Sehnen halbiert werden; ferner der des Durchmessers, *διάμετρος*, d. h. der Linie, welche alle zu einer Geraden parallele Sehnen halbiert, ebenso der des konjugierten (*συζυγής*) Durchmessers, d. h. der Linie aus der Schar dieser Parallelen, welche durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Die Axen (*ἄξονες*) sind zwei aufeinander senkrechte konjugierte Durchmesser, *συζυγεῖς ἄξονες.* Den Parameter nennt Apollonius die Senkrechte, *ἡ ὀρθή* oder *ὀρθία* [4]), lat. latus rectum, wegen seiner zur Axe, in deren Endpunkt er errichtet war, senkrechten Lage; im Gegensatz dazu ist die Bezeichnung *ἡ πλαγία* für den Durchmesser erklärlich. Den Namen Parameter, von *παρα-μετρέω*, nach einer andern Sache abmessen, scheint diese Linie deshalb erhalten zu haben, weil sie eine Nebenlinie war, welche zur Ausmessung eines Rechtecks diente, das mit dem Quadrat der Ordinate verglichen wurde. Hutton [5]) erklärt das Wort Parameter durch equal measurer, gleich verhaltend, weil die Verhältnisse der grofsen Axe zur kleinen und der kleinen Axe zum Parameter gleich grofs sind. Von den Brennpunkten kennt Apollonius nur die der Ellipse und Hyperbel, noch nicht den der Parabel;

[1]) De la Hire, Nouveaux éléments des sections coniques, Paris 1679. [2]) Apollonii Conica, lib. I, def. 17 und 19. [3]) J. H. T. Müller, l. c. p. 34. [4]) Pappus IV, 278, 17: *ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά*, rectum figurae latus. [5]) Hutton, Philosophical and mathematical dictionary. New ed. London 1815.

4*

er nennt die Brennpunkte σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς, puncta comparationis, wörtlich Punkte, die „aus der Anlegung" einer Fläche entstehen. Er konstruiert nämlich die Brennpunkte, indem er die grofse Axe in zwei Teile teilt, deren Rechteck gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe ist. Den Namen Brennpunkte, foci, haben diese Punkte von der Eigenschaft, dafs die von einem derselben ausgehenden Lichtstrahlen an der Kurve so reflektiert werden, dafs die reflektierten Strahlen, direkt oder rückwärts verlängert, sich in dem anderen Brennpunkte (der bei der Parabel im Unendlichen liegt) schneiden. Der Ausdrück radius vector, der die Verbindungslinie des Brennpunktes mit einem Punkt der Kurve bezeichnet, wurde wohl ursprünglich in mechanischer Bedeutung, als Richtung der centripetalen Kraft gebraucht. Der radius vector heifst, wegen der soeben erwähnten optischen Eigenschaft der Brennpunkte, bisweilen auch Brennstrahl. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt heifst die lineare Excentricität, und das Verhältnis dieses Abstandes zur halben grofsen Axe die numerische Excentricität oder nur Excentricität.

Schon vor der Erfindung der Kegelschnitte führte man andere von der Kreislinie verschiedene krumme Linien ein. Hippias von Elis, ein älterer Zeitgenosse des Sokrates, erfand um das Jahr 420 eine Kurve, welche sowohl zur Dreiteilung des Winkels als zur Quadratur des Kreises dienen konnte, und welche von letzerer Anwendung den Namen τετραγωνίζουσα, quadrans[1], oder Quadratrix erhielt. Gewöhnlich wird Dinostratus, der in der zweiten Hälfte des IV. S. lebte, als Erfinder der Quadratrix genannt; dieser Irrtum stammt daher, dafs der Name der Kurve allerdings jünger ist und wohl nicht über Dinostratus hinaufreicht[2]. Die Quadratrix ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte zweier anstofsenden Quadratseiten (AB, BC), deren eine (AB) sich um ihren Endpunkt (A) drehend einen Quadranten (BAD) beschreibt, während die andere (BC) sich in derselben Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit ebendahin (bis AD) bewegt, sich stets parallel bleibend.

Ferner diente zur Lösung des dritten berühmten Problems, der Würfelverdoppelung, die Konchoide oder Muschellinie (κογχοειδής von κόγχη, κόγχος, Muschel[3]), welche nach Pappus' und Eutokius' Zeugnis Nikomedes erfand, der, ein Epigone der grofsen griechischen Mathematiker, nach Cantor etwa um das Jahr 200, nach Tannery[4]) aber zwischen Archimedes und Apollonius lebte. Werden auf allen, von einem Punkte (dem Pol, πόλος) ausgehenden Strahlen, die durch eine Gerade (die Directrix oder Basis) geschnitten werden, von den Durchschnittspunkten mit der Geraden aus gleiche Strecken abgetragen, so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Strecken eine Konchoide. Ob die Griechen den Zweig der Konchoide gekannt haben, der auf derselben Seite der Geraden liegt wie der Pol, ist zweifelhaft. Pappus[5] nennt die Konchoide des Nikomedes die erste (πρώτη) und spricht von einer zweiten, dritten und vierten Konchoide; was er unter den letzteren versteht, ist aus dem Text nicht ersichtlich. Auch zur Dreiteilung des Winkels wurde die Konchoide benutzt.

Ein Zeitgenosse des Nikomedes, Diokles, erfand die Cissoide oder Epheulinie,

[1] Participium von quadrare, das Commandinus in seiner Übersetzung des Pappus 1588 gebraucht.
[2] Cantor, l. c. p 167. [3] Die ältere Schreibart ist κοχλοειδής, scil. γραμμή, von κόχλος, Muschel, das mit κόγχος verwandt ist. Pappus IV, 242 sq. und eine Ableitung für κόγχ-λο-ς (Curtius l. c. S. 145).
[4] Darboux, Bulletin des sciences mathématiques (2) VII, 284. [5] Pappus, l. IV, p. 244.

κισσοειδής, scil. *γραμμή* (von *κισσός*, Epheu), cissoides, die auf folgende Weise entsteht. Zieht man von den Endpunkten eines Kreisdurchmessers (AB) alle möglichen Sehnen und durchschneidet jede solche Sehne (AC oder BC) durch diejenige zum Durchmesser (AB) senkrechte Sehne, welche denselben Abstand vom Centrum hat wie die durch C gezogene zum Durchmesser senkrechte Sehne, so ist der geometrische Ort aller entsprechenden Durchschnittspunkte eine Cissoide. Ihre Gleichung lautet $x^3 = (a - x) y^2$.

Ein dritter Zeitgenosse, namens Perseus, untersuchte zuerst die spirischen Linien. Unter *σπεῖρα*, spira (in eigentlicher Bedeutung alles Gewundene, Knäuel), verstanden die Platonischen Akademiker einen ringförmigen Rotationskörper, der durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Gerade erzeugt wird, also einen sogenannten Wulst. Nach Hero von Alexandrien hat dieser Körper auch den Namen *κρίκος*, Ring. Die Stelle, in der Hero die Spira und ihre Arten definiert, ist folgende[1]: 'Spira fit, cum circulus, qui centrum in circulo habet et rectus stat in hujus circuli planitie, circumfertur et in eundem rursus locum reducitur. idem etiam *κρίκος* vocatur. disjuncta (*διεχής*) est spira, in qua est foramen, conjuncta (*συνεχής*), quae in uno puncto cohaeret, implexa (*ἐπαλλάττουσα*), in qua circulus, qui circumfertur, se ipse secat. fiunt etiam, harum sectiones lineae quaedam singulares.' Die hier erwähnten eigentümlichen Schnittkurven der Spira, welche durch eine zur Hauptaxe parallele Ebene erzeugt werden, sind die von Perseus untersuchten spirischen Linien. Es gibt ihrer drei, deren Gestalt je nach der Entfernung der schneidenden Ebene von der Umdrehungsaxe verschieden ist. Eine dieser Durchschnittskurven hat den Punkt, in welchem die schneidende Ebene die Oberfläche am Kehlkreise berührt, zum Doppelpunkt. Diese schleifenartige Linie wurde von Eudoxus zur Darstellung der Planetenbewegung benutzt und Hippopede, *ἵππου πέδη* (Pferdefessel) genannt[2]) Diese Hippopede beschreibt Xenophon in seiner Schrift de re equestri, über die Reitkunst, als eine Kurve, welche den Lauf so regelt, dafs beide Seiten des Pferdes symmetrisch ausgebildet und alle Wendungen leichter ausgeführt werden können.

Dieselbe Kurve hat man auch mit dem Namen Helix, *ἕλιξ*, bezeichnet[3]) und nach Aussage des Proklus[4]) hat Perseus (zwischen 200 und 100) die von ihm gefundenen spirischen Linien Helikoiden (*ἑλικοειδαῖ*) genannt. *ἕλιξ* bedeutet ursprünglich das Gewundene; es stammt von der Wurzel *ϝελ*, welche eine krummlinige Bewegung, ein winden, wälzen ausdrückt (lat. volv-o)[5]). Bei Plato wird die Windung einer Schraube so bezeichnet; überhaupt bedeutet *ἕλιξ* eine Kurve von verwickelterer Art, als die gewöhnlichen. Die Archimedische Spirale, deren Theorie Archimedes in seiner Schrift *περὶ ἑλίκων*, de lineis spiralibus, über die Schraubenlinien, auseinandersetzt, entsteht, ebenso wie die Quadratix, durch eine doppelte Bewegung: ein Punkt (A) schreitet auf einer Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, während gleichzeitig die Gerade um ihren Anfangspunkt (A) mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich dreht[6]). Die Polargleichung der archimedischen Spirale ist also $\varrho = a \cdot w$, wo w ein Kreisbogen, ϱ der Radiusvector, a eine Konstante ist.

---

[1]) G. Friedlein, De Heronis quae feruntur definitionibus. Boncompagni Bull. IV. 108, § 98.
[2]) Schiaparelli, Die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kalippus und des Aristoteles. Mem. d. Ist. Lomb. 1874, deutsch von Horn, Schlömilch Z. XXII Suppl. [3]) ibid. p. 153. [4]) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii, ed. G. Friedlein. Leipzig 1873, p. 112.
[5]) Curtius, Griech. Etym. S. 334 u. 335. [6]) Archimedis Opera omnia, ed. Heiberg II, 10, 9 –14 u. 50,

Indem wir hier die übrigen bekannten Spiralen übergehen, schliefsen wir hieran eine Gattung geometrischer Örter, welche den Namen Cykloiden (von *κύκλος* und *εἶδος*) tragen, obwohl sie durchaus nicht das Ansehen eines Kreises haben. Rollt ein Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden, so beschreibt jeder mit dem Kreise fest verbundene Punkt eine Cykloide. Wegen dieser Entstehungsart nannte man diese Kurve ursprünglich Trochoide (von *τροχός*, Rad), Radlinie, später roulette, Rollinie. Huyghens[1]) entdeckte die Eigenschaft der Cykloide, dafs ein auf ihr zum tiefsten Punkte herabgleitender Körper stets gleich viel Zeit gebrauche, von welchem Punkte er auch ausginge, weshalb die Kurve den Namen Tautochrone (*τὸν αὐτὸν χρόνον*, dieselbe Zeit) oder Isochrone (*ἰσόχρονος*, gleich an Zeit) erhielt. Die letztere Bezeichnung Isochrone gebührt richtiger derjenigen Curve, auf der ein fallender Körper in gleichen Zeiten eine gleiche Höhe durchläuft, d. h. der semicubischen oder Neil'schen Parabel, so genannt nach William Neil, der sie 1657 zuerst rektifiziert hat[2]). Joh. Bernoulli nannte später, 1696, die Cykloide Brachistochrone (*βράχιστος*, kürzeste, und *χρόνος*, Zeit), weil sie diejenige Verbindungslinie zweier Punkte ist, auf der ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen zum andern fällt. Diejenige Kurve, bis zu welcher ein Körper auf allen von einem Punkte ausgehenden Cykloiden in der gleichen Zeit fällt, wurde von Joh. Bernoulli Synchrone (*σύν* und *χρόνος*) genannt; er zeigte, dafs diese Kurve alle Cykloiden unter einem rechten Winkel schneidet, also eine orthogonale Trajektorie der Cykloidenschar ist.

Die gemeine Cykloide oder Cykloide im engeren Sinne entsteht, wenn der sie beschreibende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt; die gedehnte oder verlängerte oder geschweifte Cykloide, cycloïde allongée, cycloides prolata sive inflexa, entsteht, wenn der Punkt innerhalb des rollenden Kreises, und die verschlungene oder verkürzte Cykloide, cycloïde raccourcie, cycloides nodata sive curtata, wenn der Punkt aufserhalb desselben liegt.

Galilei scheint zuerst die Cykloide betrachtet zu haben; denn er schreibt 1639 in einem Briefe an Torricelli, dafs er diese Kurve seit 40 Jahren kenne und sie wegen ihrer zierlichen Form für Bogen von Brücken sehr geeignet gehalten habe, und dafs er versucht habe, ihre Fläche zu bestimmen[3]). Letzteres gelang für die genannten 3 Arten im Jahre 1634 dem französischen Mathematiker Roberval, wie Pascal in seiner Histoire de la roulette und in seiner Historia Trochoidis seu Cycloidis Gallicae 1655 mitteilt.

Roberval, Wallis u. a. beschäftigen sich neben der Cykloide zugleich mit einer anderen Kurve, welche sie la petite cycloïde, die kleine Cykloide, später la compagne de la cycloïde, cycloïdis socia, die Gefährtin der Cykloide, nannten. Sie entsteht, wenn man die Sinus aller Winkel um die zugehörigen Bogen verlängert.

Verwandt mit der Cykloide sind diejenigen Rollkurven, welche als Basis des rollenden Kreises nicht eine gerade Linie, sondern einen Kreis haben. Berührt der

---

22—52, 5: *εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φερῆται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τὰς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.* Eine ähnliche Definition giebt Pappus lib. IV, 21, p. 234. [1]) Huyghens, Horologium oscillatorium 1673. [2]) Aufser Huyghens löste Leibnitz selbst das von ihm aufgestellte Problem der Isochrone, Act. Erud. 1689, und zwar synthetisch, während Jac. Bernoulli die gesuchte Kurve mit Hülfe der Differentialrechnung fand (Opera I, 421; Act. Erud. 1690, p. 217). [3]) Montucla, Histoire des sciences mathématiques II, 53.

rollende Kreis den zweiten von aufsen, so beschreibt jeder Punkt der Peripherie des rollenden Kreises eine Epicykloide; berührt der rollende Kreis den zweiten von innen, so heifst die Kurve Hypocykloide, wofür die englischen Mathematiker früher lower or interior epicycloid, im Gegensatz zu upper or exterior epicycloid, sagten[1]). Die Epicykloide wurde 1674 von O. Römer entdeckt, als er die vorteilhafteste Gestalt der Zähne eines Rades suchte. Liegt der beschreibende Punkt nicht auf der Peripherie des rollenden Kreises, so spricht man wohl von verlängerten oder verkürzten Epi- und Hypocykloiden, doch nennt man auch die ersteren Epitrochoiden, die letzteren Hypotrochoiden (von τροχός, Rad).

Unter einer sphärischen Epicykloide versteht Hermann[2]) diejenige Raumkurve, welche ein Punkt auf dem Grundkreise eines geraden Kegels beschreibt, wenn der Kegel auf einer Ebene so rollt, dafs seine Spitze fest bleibt.

Die vorhin erwähnte Konchoide des Nikomedes hat zur Basis eine gerade Linie; nimmt man statt dessen einen Kreis und den Pol innerhalb dieses Kreises, so entsteht auf gleiche Weise eine Kurve, welche man Kreis-Konchoide genannt hat. Roberval nannte sie le limaçon de Pascal, Pascals Schnecke. Sie kann eine dreifache Gestalt haben, je nach der Gröfse der abgetragenen Strecken. In dem einen Falle ist sie identisch mit der Curve, welche Castillon (Castillioneus) — nicht, wie Klügel sagt, Castilliani — wegen ihrer herzförmigen Gestalt Kardioïde, Herzlinie (καρδιοειδής von καρδία, Herz), nannte[3]). Sie soll schon früher, wie Carré sagt, von Koersma betrachtet worden sein, der ihre gröfste Breite bestimmt habe. Später wurde sie von Louis Carré behandelt (Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle)[4]). Die Kurve hat bei ihm noch keinen Namen. Zieht man von einem Punkte (A) eines Kreises sämtliche Sehnen (AB) und trägt auf diesen vom Endpunkte (B) aus nach beiden Richtungen Strecken ab, die gleich dem Durchmesser des Kreises sind, so liegen die Endpunkte der abgetragenen Strecken auf einer Kardioide.

Statt der Kreisbasis hat man auch andere Kurven als Basis der Konchoide angenommen, wie die Ellipse, Hyperbel und Parabel, und die so entstehenden Kurven elliptische, hyperbolische, parabolische Konchoide genannt. Von diesen handelt z. B. Rabuel in seinem Commentaire sur la Géométrie de Descartes, p. 123 sq.

Die Kurve, welche Cassini (Éléments d'astronomie p. 149) zur Darstellung der Bewegung der Erde um die Sonne geeigneter hielt, als die Kepplersche Ellipse, hat man Cassinoide genannt. Nirgends war wohl die vielbeliebte Endsilbe -ide (ειδής) ungeschickter angebracht als in dem Worte Cassinoide, das eine Kurve bedeuten würde, die mit Cassini Ähnlichkeit hat! Mit Recht ist deshalb vorgeschlagen, diese Kurve Cassinisches Oval oder Cassinische Ellipse zu nennen. Sie ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von 2 festen Punkten ein konstantes Produkt haben. Je nachdem dieses Produkt gröfser, gleich oder kleiner als das Quadrat der halben Entfernung der beiden festen Punkte ist, hat die Kurve die Gestalt eines Ovals oder einer Schleife, oder besteht sie aus 2 getrennten Ovalen. Die Schleifenform hat man die Lemniscate von Bernoulli genannt. Jacob Bernoulli wurde auf diese Kurve geführt, als er

---

[1]) Hutton, Philosophical and mathematical dictionary. New ed. London 1815, I, 433. [2]) Comment. Acad. Petrop. I. [3]) Lond. Philosoph. Transact. 1741, p. 778. [4]) Hist. d. l'Ac. d. Sc. d. Paris, année 1705.

die Isochrona paracentrica darstellen wollte[1]). Der Name Lemniscate kommt her von *ληµνίσκος*, das ein wollenes Band oder eine Schlinge bedeutet.

Von den Ovalen sind hier noch die Cartesischen Ovale zu erwähnen. Diese sind dadurch definiert, dafs die von 2 Punkten, den Brennpunkten, aus gezogenen Radienvectoren nach einem gegebenen Verhältnis wachsen oder abnehmen, so dafs also Ellipse und Hyperbel gleichsam besondere Arten dieser Ovale bilden[2]). Descartes (Géométrie, l. II) wurde durch ein optisches Problem auf sie geführt; er suchte die Kurven, welche alle von einem Punkte ausgehenden Strahlen so brechen, dafs sie nach der Brechung wieder in einem und demselben Punkte sich vereinigen. Newton zeigte, dafs diese Ovale der geometrische Ort aller Punkte seien, deren Abstände von 2 gegebenen Kreisen ein konstantes Verhältnis haben. J. Herschel nannte diese Ovalen lignes aplanétiques (von *πλάνητος*, umherirrend), d. h. ohne Abweichung, sans aberration. Veranlafst durch die Entdeckung, dafs das Oval aufser den von Descartes betrachteten beiden Brennpunkten noch einen dritten von gleicher Eigenschaft besitzt, hat man Cartesische Kurven in allgemeinerem Sinne diejenigen genannt, für welche 3 Brennpunkte in gerader Linie existieren, die entweder alle 3 reell oder von denen 2 imaginär sind. Diese Cartesische Kurve ist der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Basisecken sich in 2 festen Kreisen bewegen, während die Seiten und die Basis sich um die Centra und einen festen Punkt in der Centrale derselben drehen[3]).

Während diese Ovale von der vierter Ordnung sind, ist das Cartesische Folium eine Kurve dritter Ordnung: $x^3 + y^3 = axy$. Descartes erwähnt sie zuerst in einem Briefe[4]). Roberval gab ihr den Namen Galand ou fleur de Jasmin[5]). Sie ist nicht zu verwechseln mit der Cartesischen Parabel, die von Descartes zur Konstruktion der bestimmten Gleichungen 5. und 6. Grades benutzt und deshalb von Newton cartesische genannt wurde.

Auf eine grofse Zahl anderer Kurven, welche in der analytischen Geometrie behandelt werden, können wir hier nicht weiter eingehen, ebenso müssen wir mehrere in der Mechanik auftretende interessante Kurven übergehen. Wir wollen nur noch erwähnen, dafs man schon im 17. Jahrhundert Kegelschnitte von höherem Geschlechte untersuchte[6]), welche als Schnitte einer Ebene mit einem Kegel von höherem Grade aufzufassen sind. Die Ellipsen höherer Ordnung werden auch elliptoides und die Parabeln höherer Ordnung paraboloides genannt. Die in dieser Bedeutung nicht mehr gebräuchlichen Worte Elliptoid und Paraboloid fanden hier eine passendere Anwendung als später zur Bezeichnung der Körper, die durch Umdrehung einer Ellipse oder Hyperbel entstehen.

---

1) Acta Eruditorum 1694. 2) Montucla, l. c. II, 129. 3) Salmon-Fiedler, Höhere ebene Kurven, 1873, p. 211. 4) Klügel, math. Wörterbuch, II, 268. 5) Lettres de Descartes, Paris 1667, P. III, lettre 48. 6) De la Hire, Théorie des coniques, Paris 1672, lat. 1682, und Nouveaux éléments des sections coniques, Paris 1679 u. 1701.

Druck von W. Pormetter in Berlin.